



Diffusion électromagnétique par des objets inhomogènes : De la couche à la structure complexe

Éva Dieudonné

► To cite this version:

Éva Dieudonné. Diffusion électromagnétique par des objets inhomogènes : De la couche à la structure complexe. Optique [physics.optics]. Aix-Marseille Université, 2015. Français. NNT : . tel-01284825

HAL Id: tel-01284825

<https://theses.hal.science/tel-01284825>

Submitted on 8 Mar 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives| 4.0 International License

AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ
ED 352 – PHYSIQUE ET SCIENCE DE LA MATIÈRE
CEA DAM, le Ripault, BP 16, 37260 Monts
Aix-Marseille Université, CNRS, Institut Fresnel, UMR 7249, 13013 Marseille

Thèse présentée pour obtenir le grade universitaire de docteur

Discipline : Optique, photonique et traitement d'images

Éva DIEUDONNÉ

Diffusion électromagnétique par des objets inhomogènes :
De la couche à la structure complexe



Soutenue le 20 Février 2015 devant le jury :

Valérie VIGNERAS	IMS Bordeaux	Rapporteur
Antoine MOREAU	Université Blaise Pascal	Rapporteur
Nicolas VUKADINOVIC	Dassault Aviation	Examineur
Claude AMRA	Institut Fresnel	Examineur
Nicolas MALLÉJAC	CEA le Ripault	Codirecteur de thèse
Stefan ENOCH	Institut Fresnel	Directeur de thèse



Cette œuvre est mise à disposition selon les termes de la [Licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France](#).

Résumé

Les objets électromagnétiques sont conçus en considérant des matériaux aux propriétés radio-électriques (permittivité, perméabilité) homogènes. Néanmoins, lors de leur réalisation les matériaux réels peuvent présenter des fluctuations de ces propriétés. Ce travail porte sur la mise au point d'outils capables d'estimer le champ diffusé produit par les fluctuations. Trois méthodes ont été mises au point : EMFORS, ABE et RECY pour la détermination du champ diffusé par des fluctuations de permittivité et de perméabilité. La modélisation de la contribution des fluctuations de perméabilité est une avancée significative. En effet, il n'existait pas d'outil traitant ce problème dans toute sa généralité pour estimer le champ diffusé par cette fluctuation. L'absence de magnétisme aux fréquences des ondes optiques en est la principale raison.

Les trois méthodes ont toutes pour base une approximation du premier ordre. Elles permettent d'estimer le champ diffusé par des fluctuations de permittivité et de perméabilité au sein d'un empilement de couches magnéto-diélectriques. Chaque méthode possède ensuite des particularités propres.

La méthode EMFORS est une résolution matricielle. Elle permet une résolution rapide. Nous avons ainsi pu montrer que la nature de la fluctuation influe sur le niveau de l'intensité diffusée. Ainsi, dans le cas d'un slab simple dans l'air, la fluctuation de perméabilité (à valeur égale) génère moins de champ diffusé que la fluctuation de permittivité.

La méthode ABE est une résolution itérative utilisant les admittances. Elle permet l'obtention d'une solution analytique. Cette solution analytique permet d'obtenir dans des cas simples des outils d'estimation rapide du champ diffusé pour une couche mince dans l'air ou sur un métal.

La méthode RECY est une méthode qui permet d'estimer à l'aide du principe de réciprocité le champ diffusé dans un objet quelconque à partir de la simple connaissance du champ dans l'objet sans défaut et de la fluctuation. Cette méthode permet une fois le calcul du champ idéal effectué par une méthode quelconque (analytique ou numérique) de calculer le champ diffusé de n'importe quelle forme de fluctuation.

Nous avons appliqué RECY à des structures comme un réseau simple, une structure industrielle et aux cristaux photoniques. La méthode a donné de très bons résultats lorsque les défauts étaient compatibles de l'approximation du premier ordre. Dans les cristaux photoniques, les défauts présentent une réponse résonante non compatible de l'approximation du premier ordre. Aussi pour l'étude des défauts dans les cristaux photoniques, nous avons utilisé une méthode de Monte-Carlo. Nous avons ainsi montré la contribution majeure de la polydispersité des tailles des inclusions constitutives du cristal.

Mots clés : électromagnétisme, diffusion, perméabilité, approximation du premier ordre, réciprocité, cristaux photoniques.

Abstract

Electromagnetic objects are designed by considering homogeneous materials properties (permittivity, permeability). However, during their realization real materials may present fluctuations of their properties. This work focuses on the development of tools able to estimate scattered fields produced by fluctuations. Three methods have been developed : EMFORS, ABE and RECY for the determination of the scattered field by fluctuations of permittivity and permeability. Taking into account permeability fluctuations is a significant advance. Indeed, there was no tool to estimate the scattered field by such a fluctuation, due to the absence of magnetic properties at optical frequencies.

The three methods are based on the first order approximation. They allow to estimate the scattered field by fluctuations of permittivity and permeability within magneto-dielectric multilayer.

The EMFORS method is a matrix resolution. It allows rapid resolution. Thus, we have shown that the nature of the fluctuation plays on the scattered intensity levels. Thus, the permeability fluctuation (for same value) scatters less than the permittivity fluctuations.

The ABE method is an iterative resolution using the admittances. It gives an analytical solution in simple cases. This analytical solution gives tools for rapid assessment of the scattered field for a thin layer in the air or on a metal.

The RECY method is a method which allows to estimate the field in an object using the principle of reciprocity from the knowledge of the field in the object without defect and of the fluctuation function. This method allows, once the ideal field calculated by any method (analytic or digital), to obtain the scattered field from any structure.

We applied RECY for structures such as elementary gratings, an industrial structure and photonic crystals. The method has shown very good agreement when the defect is compatible with first-order approximation. In photonic crystals, defects present a resonant response that invalidate the first-order approximation. For this reason, defects in photonic crystals were investigated by a Monte-Carlo method. We have thus shown that polydispersity of the sizes of the objects is the main contribution to scattered field in photonic crystals.

Keywords : electromagnetism, scattering, permeability, first-order approximation, reciprocity, photonic crystals.

Remerciements

Après trois années de thèse on a l'impression de n'avoir pas fait grand-chose, tout est bien ordonné dans notre tête, tout nous paraît simple et clair. Bien sûr au début, on n'aurait jamais imaginé pouvoir réaliser tout cela. Et pourtant à l'heure du bilan, on constate que l'on a beaucoup progressé et cela grâce à de nombreuses personnes.

Il y a nous-même évidemment, le travail ne s'est pas fait tout seul... Mais il y a aussi notre encadrant, la personne qui était là chaque jour durant cette thèse. Pour moi, il s'agit de Nicolas. Je tiens tout particulièrement à lui témoigner ma gratitude. Il est un encadrant attentif, patient, disponible et il ferait un très bon directeur de thèse. Je l'encourage donc à poursuivre.

Le directeur de thèse est également une personne importante pour le bon déroulement de ce travail de recherche. Il arrive cependant que certains ne soient pas très présent pour leur doctorant, ce qui est heureusement, pas mon cas. Stefan a été un bon directeur de thèse et je pense bien l'avoir rencontré bien plus souvent que certains doctorants alors même qu'il était à 800 km du lieu où j'ai effectivement travaillé. Je tiens donc à le remercier pour sa disponibilité et pour l'ensemble des idées qu'il a apporté à ce travail.

Je souhaite également dire un grand merci à l'Institut Fresnel pour m'avoir accueilli durant quatre mois avant le début mon travail de thèse et d'avoir financé ma conférence à Turin en 2013. J'ai également passé de très bons moments avec les doctorants du troisième étage et découvert la magnifique ville de Marseille ainsi que son délicieux pastis !

Ma reconnaissance va au CEA le Ripault où j'ai passé trois années de ma vie. Loin d'une expérience purement professionnelle ce travail m'a apporté une grande ouverture vers les autres. Tant par les personnes qui en font partie que par le soutien financier qu'il apporte pour la diffusion de la recherche scientifique. J'ai ainsi pu présenter mes travaux à Londres en 2014 et ce fut pour moi une expérience inoubliable. J'ai également rencontré des collègues compétents et accueillants avec qui j'ai pu discuter de nombreux sujets et ainsi acquérir de nouvelles briques sur le chemin de mon existence. Je les en remercie grandement tout particulièrement l'ex-LMMO ainsi que l'équipe des SIMs (ils se reconnaîtront).

Je souhaite également parler des doctorants que j'ai eu la joie de rencontrer au cours de ces trois années, ceux qui sont docteurs maintenant et ceux qui vont le devenir. Je leur souhaite de réussir dans leur projet professionnel et les encourage à poursuivre. Une attention particulière à David, Julien et Xavier avec qui j'ai eu la joie de travailler.

Je n'oublie pas les « copains » du Sol-Gel, avec qui nous nous sommes retrouvés réunis au sein d'un même laboratoire. Cette collaboration avait déjà été entamée par les travaux réalisés avec Florence Benoit et Bertrand Bertussi sur les cristaux photoniques, je tiens à leur témoigner ma reconnaissance. Je remercie également l'ensemble du laboratoire pour son accueil et leur volonté d'unification. Je souligne par là-même notre brillante 3ème place au TIS de 2014. Le Retour du Fond du Centre en force !

Le TIS n'existerait pas sans le travail acharné des membres d'Astéroïd, je tiens donc à les féliciter pour le temps et les efforts engagés.

Je tiens à remercier les membres du jury et plus particulièrement les rapporteurs d'avoir accepté de juger ce travail.

Je fini traditionnellement par ma famille et mes amis qui ont toujours été là. A mon frère Xavier pour m'avoir montré la voie de la recherche scientifique. A ma belle-sœur Marlène pour avoir été présente tout simplement. A mon frère Franck et ma belle-sœur Lény de m'avoir apporté la joie d'être tata. A mes parents pour m'avoir laissé la liberté de choisir ma voie. Et enfin à mes meilleurs amis Séverine et Vincent pour leur amitié indéfectible.

Table des matières

Résumé	3
Abstract	5
Remerciements	7
Introduction générale	17
I Méthodes pour la diffusion électromagnétique au premier ordre	21
Introduction	23
1 Diffusion électromagnétique - Méthode du premier ordre	27
1.1 Équations de Maxwell	27
1.2 Traitement général de géométries 1D par la théorie des distributions . . .	29
1.3 Approximation du premier ordre	33
1.4 Équations du vecteur d'onde	35
1.4.1 Dualité	36
1.4.2 Solutions	37
2 Méthode EMFORS	43
2.1 Système d'équation aux interfaces	43
2.2 Cas de la première interface (Source du champ idéal)	44
2.3 Cas de la dernière interface	45
2.4 Matrice $\bar{\bar{W}}$	46
2.5 Système à résoudre pour le champ idéal	48
2.6 Source de la solution homogène du champ diffusé	48
2.7 Validation de la méthode EMFORS par comparaison avec un résultat de référence	49
2.8 Validation d'EMFORS par un calcul d'éléments finis	51
2.9 Limite de validité	52
3 Méthode ABE	55
3.1 Indice effectif	55

3.2	Matrice de transition	57
3.3	Admittances	58
3.4	Détermination du champ à l'interface de la couche inhomogène j	60
3.5	Expression des champs particuliers	62
3.6	Champ diffusé	62
3.7	Champs idéaux par la méthode ABE	63
3.8	Validations	64
3.9	Solution analytique	65
4	Méthode RECY	67
4.1	Théorème de réciprocité	67
4.1.1	Forme différentielle	68
4.1.2	Forme intégrale d'après la forme différentielle	68
4.1.3	Forme intégrale par le second théorème de Green	69
4.2	RECY - Illustration pour une couche diélectrique	70
4.2.1	Configuration a	70
4.2.2	Configuration b	71
4.2.3	Champ diffusé en réflexion	71
4.3	RECY dans l'espace de Fourier	72
4.3.1	Établissement du théorème de réciprocité dans l'espace de Fourier	72
4.3.2	Configuration a	74
4.3.3	Configuration b	74
4.3.4	Champ diffusé en réflexion	75
4.4	Validation	75
4.5	Efficacité	76
	Conclusion	79
 II Applications des méthodes du premier ordre à des objets magnéto-diélectriques		81
	Introduction	83
5	Couche magnéto-diélectrique	85
5.1	Fluctuation de perméabilité, niveau et corrélation	85
5.2	Solution analytique pour la diffusion d'une couche magnéto-diélectrique	88
5.3	Influence des permittivité et perméabilité sur la diffusion	88
5.3.1	Couche dans l'air	88
5.3.2	Couche sur métal	90
5.4	Approximation de la couche mince	90
5.4.1	Dans l'air	90
5.4.2	Sur métal	92
5.5	Exemple de méta-matériau : la superlentille	93
5.5.1	Principe de la superlentille	93
5.5.2	Défaut dans une superlentille	93

6	Réseaux diélectriques	95
6.1	Réseau d'étude	95
6.2	Défaut unique de propriété de l'inclusion 18	96
6.3	Défaut unique de géométrie de l'inclusion 18	97
6.4	Cas de deux défauts de propriétés et de géométrie	100
6.4.1	Défauts de propriété	100
6.4.2	Défauts géométriques	101
6.5	Efficacité et rapidité	102
7	Résonances d'inclusions et effet de finitude des objets	103
7.1	Résonance d'une inclusion seule	103
7.1.1	Solution analytique de Mie d'un cylindre	103
7.1.2	Solution de Mie d'un cylindre circulaire de rayon variable	104
7.1.3	Solution numérique de Mie d'un cylindre de forme variable	105
7.1.4	Solution de Mie d'un cylindre circulaire à pertes	106
7.2	Réseaux finis et infinis, homogénéisation et effet de bords	106
7.2.1	Réseau fini	107
7.2.2	Réseau infini	109
7.3	Limite de validité	111
8	Application sur une structure industrielle - CMOS	113
8.1	Modélisation des structures CMOS	113
8.2	Méthode de calcul : RECY par dipôle	115
8.3	Champ diffusé dans des photosites CMOS	115
8.3.1	Défaut cosinus 1	116
8.3.2	Défaut cosinus 2	117
8.3.3	Défaut sinus 1	118
8.3.4	Défaut sinus 2	120
	Conclusion	123
III	Diffusion dans les cristaux photoniques	125
	Introduction	127
9	Structures de bandes	129
9.1	Structure de bande d'un cristal 1D	129
9.2	Structure de bandes d'un cristal 2D	131
9.3	Compréhension de la structure de bande	135
9.3.1	Bande 1 - Points p_1 et p_2	135
9.3.2	Gap 1 - Point p_3	136
9.3.3	Bande 2 - Point p_4 et p_5	136
9.3.4	Gap 2 - Point p_6	136
9.3.5	Bande 3 - Point p_7	136
9.3.6	Bande 4 - Point p_8 et p_9	136

10 Étude des défauts dans un cristal photonique 2D	139
10.1 Nombre de périodes empilées pour l'obtention de la réflectivité maximale	139
10.2 Étude au premier ordre du champ diffusé par un défaut ponctuel de permittivité	143
10.2.1 RECYn : évaluation exacte du champ diffusé	143
10.2.2 RECY contre RECYn, la contribution du premier ordre	144
10.3 Localisation des champs dans les défauts ponctuels	149
10.3.1 Défaut de permittivité	149
10.3.2 Défaut de rayon	150
10.4 Étude au premier ordre du champ diffusé par un tirage de défauts ponctuel de permittivité	151
10.5 Étude statistique de défauts de taille des cylindres	152
10.5.1 Retrait de cylindres	153
10.5.2 Polydispersité du rayon des cylindres	154
11 Analyse de cristaux photoniques 3D fabriqués pour l'optimisation de la réflectivité	157
11.1 État de l'art de la fabrication d'opale	157
11.2 Procédé d'élaboration	159
11.3 Mesures expérimentales	160
11.4 Modélisation numérique	161
11.5 Confrontation Expérience/Modèle	163
Conclusion	165
Conclusion générale	169
Annexes	173
A Système de coordonnées généralisées	173
A.1 Coordonnées curvilignes	173
A.1.1 Base(s) de coordonnées curvilignes	174
A.1.2 Vecteur dans la base de coordonnées curvilignes	174
A.1.3 Élément de longueur ds^2	175
A.1.4 Opérateurs différentiels	175
A.2 Systèmes orthogonaux	175
A.3 Exemples pratiques	176
A.3.1 Coordonnées cylindriques	176
A.3.2 Coordonnées sphériques	177
B Dérivée au sens des distributions	179
B.1 La fonction de Heaviside $\mathcal{H}(z)$	179
B.2 La fonction de Heaviside $\mathcal{H}(z - h(x, y))$	180
B.3 Dérivée du produit d'une distribution quelconque T par une fonction α indéfiniment dérivable	182

B.3.1	Démonstration de la règle de calcul	182
B.3.2	Application à la fonction de Heaviside	183
B.4	Divergence du produit d'un champ continu et de la fonction de Heaviside	184
B.4.1	La fonction de Heaviside $\mathcal{H}(z)$	184
B.4.2	La fonction de Heaviside $\mathcal{H}(z - h(x, y))$	184
B.5	Rotationnel du produit d'un champ continu et de la fonction de Heaviside	185
B.5.1	La fonction de Heaviside $\mathcal{H}(z)$	185
B.5.2	La fonction de Heaviside $\mathcal{H}(z - h(x, y))$	185
C	Opérateur Nabla, dyade et produit vectoriel	187
C.1	Propriétés de l'opérateur nabla	187
C.2	Définition d'une dyade	188
C.3	Rotationnel du produit d'une dyade et d'un vecteur	188
C.4	Rotationnel du rotationnel du produit d'une dyade et d'un vecteur	189
C.5	Transformation de Fourier	190
C.6	Propriétés utiles des opérateurs dyadique	191
C.7	Propriétés utiles pour les vecteurs	192
D	Intensité diffusée normalisée	193
D.1	Définition du flux de vecteur à travers une surface	193
D.2	Vecteur de Poynting	193
D.3	Flux du vecteur de Poynting à travers la surface S	194
D.4	Projection d'une surface dans un plan	195
D.5	Intensité diffusée	196
D.6	Flux incident	196
D.7	Intensité diffusée normalisée	197
E	Amplitude de l'onde plane générée par un dipôle	199
E.1	En 3D direct	199
E.2	En 2D direct	200
F	Homogénéisation	201
F.1	Lois de Maxwell-Garnett et Bruggeman	201
F.2	Test des lois d'homogénéisations sur un exemple de matériau composite 2D	203
F.2.1	Polarisation S	203
F.2.2	Polarisation P	203
G	Diffusion par un multicouche rugueux	207
G.1	Établissement des équations	207
G.1.1	Distribution de Heaviside pour une surface rugueuse	207
G.1.2	Système d'équation pour un multicouche rugueux	208
G.2	Résolution par les matrices	209
G.3	Validation d'après la littérature	210

H	Démonstration de la formule pour le maximum de réflexion d'un miroir de Bragg	213
H.1	Rappel des équations nécessaires	213
H.2	Matrice de couche	213
H.3	Matrice de transfert	214
H.4	Calcul du coefficient de réflexion de l'empilement	215
I	Méthode des ondes planes	217
I.1	Équations de Maxwell	217
I.2	Théorème de Floquet-Bloch	218
I.2.1	Notion de réseau réciproque	218
I.2.2	Transformée de Fourier discrète	218
I.3	Méthode E	219
I.4	Méthode H	220
	Bibliographie	221

Introduction générale

Petite histoire de l'électromagnétisme

Lorsque l'on fait mention d'électromagnétisme [1], le nom de Maxwell et de ses célèbres équations vient naturellement à l'esprit. Cependant, cette théorie découle du travail de plusieurs autres physiciens.

Ørsted [2] (figure 1a) posa la toute première brique d'union entre le magnétisme et l'électricité. Jusqu'alors ces deux notions étaient disjointes. En 1820, c'est lors d'un cours à l'Université de Copenhague qu'il montra expérimentalement qu'un courant électrique dévie magnétiquement une aiguille. Cette découverte a longtemps été présentée comme étant le fruit du hasard. Mais le scientifique pressentait déjà que les effets magnétiques et électriques étaient liés.

Cette première pierre fut le premier pas sur le chemin de l'électromagnétisme. Par la suite, de nombreux scientifiques prolongèrent les travaux d'Ørsted. Le plus illustre d'entre eux, Ampère poursuivit les travaux d'Ørsted, et son nom est associé à l'une des quatre équations de Maxwell.

En 1831, Faraday (figure 1b) démontre expérimentalement le phénomène d'induction électromagnétique. Henry fit peu avant Faraday l'expérience de l'induction électromagnétique, mais le manque de publication de sa part explique le peu de notoriété qui lui est accordée. Le nom de Faraday est associé à une des quatre équations fondamentales de l'électromagnétisme.

C'est en 1864, que Maxwell (figure 1c), grand admirateur de Faraday, propose une formulation mathématique d'unification des phénomènes électrique et magnétique en reprenant les travaux de ses prédécesseurs. Peu après la mort du scientifique écossais et des validations apportées par les travaux de Hertz, la théorie conçue par Maxwell devient la base de l'électromagnétisme. Aujourd'hui ces équations portent son nom et la compréhension et la simulation de toute application électromagnétique moderne revient à les résoudre.

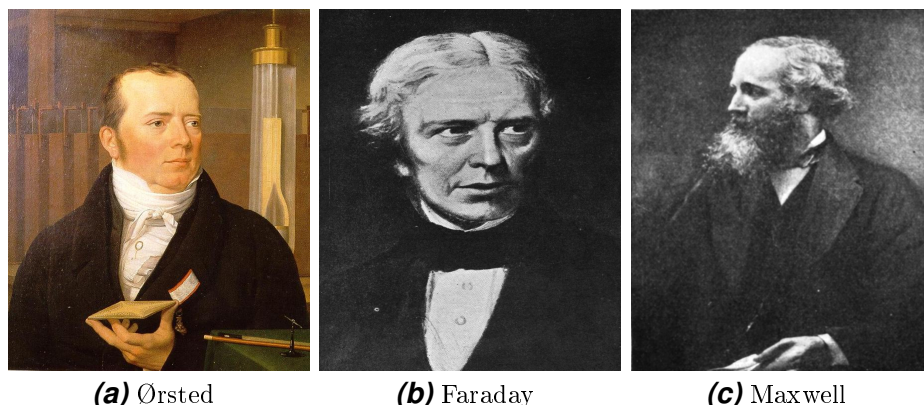


Figure 1 – Photographies des pères de l'électromagnétisme.

Contexte du manuscrit

La possibilité pour l'humanité de créer et maîtriser une action à grande distance a vu le jour avec la fondation de l'électromagnétisme. Depuis, d'innombrables travaux ont conduit à l'élaboration d'objets ou de systèmes utilisant les propriétés de ces ondes. Les deux plages de fréquence les plus exploitées pour les applications de l'électromagnétisme sont les micro-ondes et le domaine optique. Les plupart des matériaux présents dans la nature sont caractérisés par leur permittivité, qui traduit leur réponse à un champ électrique, et leur perméabilité, qui traduit leur réponse à un champ magnétique. En dehors du domaine micro-onde, la perméabilité des matériaux "naturels" est généralement égale à celle du vide (elle vaut μ_0). Les dispositifs optiques reposant sur ces matériaux "naturels" ne nécessitent donc pas pour leur compréhension ou leur conception de traiter de la perméabilité. A l'inverse, dans le domaine micro-onde, les matériaux magnétiques présentent une perméabilité significative. De nombreuses applications tirent partie de cette caractéristique.

Le besoin toujours croissant de contrôle des ondes électromagnétiques a amené la communauté scientifique à concevoir des matériaux dont les propriétés particulières ne peuvent être retrouvées dans la nature sous forme directement exploitable. Deux champs d'investigations importants sont nés de cette question : les méta-matériaux et les cristaux photoniques

Les méta-matériaux [3] sont des matériaux constitués de petites structures répétées périodiquement. Ils conservent l'appellation de matériaux en raison de l'échelle de leur structuration, qui est sub-longueur d'onde, et qui leur permet d'être décrits par des propriétés radio-électriques effectives. En particulier, ils présentent une perméabilité effective différente de μ_0 quel que soit la plage de fréquence d'application (optique, IR, micro-onde,...), ce qui leur octroie une caractéristique particulière par rapport aux matériaux naturels. Les méta-matériaux ont connu un intérêt croissant au cours des dernières décennies. Deux exemples remarquables d'application peuvent être cités : la super-lentille [4, 5, 6, 7] et la cape d'invisibilité [8, 9, 10].

L'idée des cristaux photoniques [11, 12, 13] est issue des découvertes de la physique du solide et des effets d'interférences constructives et destructives dans des réseaux cristallins. Le cristal photonique vise essentiellement à reproduire ces effets dans le domaine des ondes optiques (bien que cela puisse être appliqué aux autres plages fréquentielles). Ainsi les premiers cristaux photoniques étaient des empilements 1D, dont l'application la plus courante est le miroir de Bragg, connus bien avant que le terme cristal photonique ne soit consacré. Les cristaux photoniques se rapprochent des méta-matériaux au sens où ils sont constitués d'un ensemble de structures réparties périodiquement. Cependant, l'exploitation des interférences sur lesquelles repose leur fonctionnement, leur interdit d'être structurés sub-longueur d'onde et par conséquent d'être décrits par des propriétés radio-électriques effectives comme le sont les méta-matériaux. Il a été depuis découvert que les cristaux photoniques étaient présent dans la nature sous de multiples formes : on peut citer, par exemple, les opales, les ailes de papillon, les carapaces de scarabées...

La conception de systèmes ou d'objets pour des applications électromagnétiques fait généralement l'hypothèse de matériaux sans défaut. La réalité n'est toutefois pas toujours si belle. Les moyens de réalisation, et leur contrôle de production, toujours plus performants et précis, parviennent généralement à éviter les défauts majeurs dans ces

matériaux. En revanche, il est difficile d'éviter la présence de fluctuation autour de la valeur des propriétés radioélectriques désirées, au sein des matériaux utilisés. Or, selon l'application, ces fluctuations de propriétés peuvent engendrer une réponse inadéquate se traduisant par un champ diffusé dans tout l'espace. Ainsi se pose la question de l'ingénierie du champ diffusé par des fluctuations de propriétés : il est important de savoir estimer rapidement quels sont les défauts à éviter pour une application optimale de l'objet.

Sommaire du manuscrit

Ce manuscrit expose dans un premier temps les notions essentielles pour le calcul du **champ diffusé** en partant des équations de Maxwell et en introduisant les distributions. Dans la première partie, nous faisons un rappel de ces notions dans le Chapitre 1 qui nous conduit au système d'équations que nous cherchons à résoudre pour chacun des milieux étudiés. Nous exposons ensuite dans les Chapitres 2 et 3 deux méthodes de résolutions, une méthode directe par inversion de matrice : EMFORS et une méthode analytique par l'utilisation des admittances : ABE. Dans le Chapitre 4, nous exposons une nouvelle méthode basée sur le principe de réciprocité et l'approximation du premier ordre : RECY. Chacune des méthodes est validée par une comparaison depuis la littérature et un calcul exact via un code d'éléments finis (COMSOL®).

Une fois les méthodes établies nous les appliquons dans la deuxième partie à des objets de complexité croissante. Dans le Chapitre 5, nous montrons tout d'abord l'apport de la prise en compte des fluctuations de perméabilité. Nous tirons alors partie de la solution analytique pour déduire des estimateurs simples de champs diffusé pour des couches minces dans l'air et sur métal. Le Chapitre 6 traite ensuite des réseaux, en utilisant cette fois les potentialités de RECY. Les résultats obtenus nécessitent une analyse un peu poussée qui fait l'objet du Chapitre 7. Nous cherchons à y comprendre les mécanismes du réseau et à justifier les limites de comparaison entre le champ diffusé par un objet fini et un objet infini. Dans le Chapitre 8, nous illustrons les capacités de RECY à estimer les champs par des défauts présents au sein d'un dispositif "industriel" : les pixels CMOS que l'on retrouve dans des appareils photo numériques.

Les très bons résultats obtenus pour toutes les structures étudiées dans la deuxième partie, nous ont conduits à l'étude du champ diffusé dans les cristaux photoniques : c'est l'objet de la troisième partie. Le Chapitre 9 est consacré à la compréhension des structures de bandes du cristal. Dans le Chapitre 10, nous commençons l'étude des défauts dans un cristal 2D. Nous étudierons, les défauts de permittivité et de taille des cylindres constituant le cristal. Finalement dans le Chapitre 11, nous chercherons à obtenir une confrontation entre le calcul du champ diffusé et la mesure expérimentale des cristaux fabriqués dans notre laboratoire.

Première partie

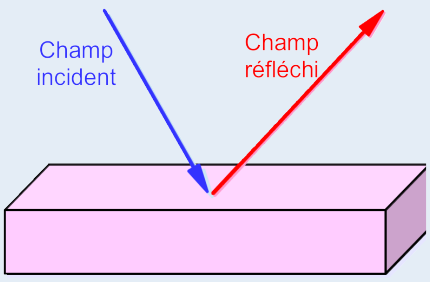
Méthodes pour la diffusion électromagnétique au premier ordre

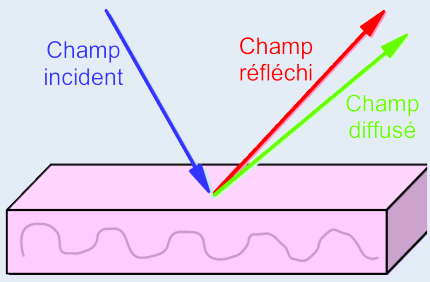
Introduction

La diffusion électromagnétique intervient dans de nombreux domaines des sciences comme la médecine, l'optique, la géophysique, les communications et la télédétection.

Diffusion

La figure de gauche présente une couche homogène infinie que nous désignons par **état idéal**. Cette couche est éclairée par une onde électromagnétique incidente et nous nous intéressons (pour simplifier) uniquement au champ réfléchi. Le champ incident est réfléchi d'après les lois de Fresnel dans une seule direction. Le champ total est donc décomposé en la somme du champ incident et du réfracté (idéal). Dans le cas de la couche infinie, le champ réfracté est le champ réfléchi et transmis spéculaire. La figure de droite présente la même couche mais avec des fluctuations (fluctuation de l'état idéal). Le champ incident est réfracté par la partie homogène de la couche et la fluctuation produit sous l'action du champ incident un champ diffusé renvoyé dans toutes les directions. Le champ total est donc décomposé en trois parties, le champ incident, le réfracté idéal et le champ diffusé.


$$\vec{E}^t = \vec{E}^{inc} + \vec{E}^0$$


$$\vec{E}^t = \vec{E}^{inc} + \vec{E}^0 + \vec{E}^d$$

Elle apparait dès que les milieux présentent une inhomogénéité. Elle peut être liée à une irrégularité de la surface délimitant le milieu, il est alors question de rugosité ou d'inhomogénéité surfacique, et/ou à une hétérogénéité dans la répartition des propriétés électromagnétiques du milieu, il est alors question d'inhomogénéité volumique.

L'effet d'une géométrie particulière d'un objet n'est pas ce que nous qualifions de diffusion au sens où nous l'avons défini. En effet, ce n'est pas une fluctuation mais une rupture brutale de propriétés de matériaux. Néanmoins, la contribution de cette géométrie particulière pourra faire partie de l'état idéal tel que nous le définissons dans ce

manuscrit. Le calcul du champ électromagnétique pour des géométries quelconques est difficile analytiquement. C'est pourquoi, le cas de la sphère homogène [14, 15, 16] (utile pour décrire les particules et dont le champ est donné par la solution de Mie) ainsi que celui des milieux stratifiés (empilements de couches planes) ont fait l'objet de nombreuses études. Nous commencerons d'ailleurs par cette forme simple de la couche infinie (un seul matériau dans l'air).

La diffusion de surface est un problème traité par de nombreuses méthodes de calculs dont on peut distinguer deux types : les méthodes rigoureuses (dont un inventaire peut être trouvé dans [17]) et les méthodes approchées (répertoriées dans [18, 19]). Les méthodes rigoureuses sont des méthodes purement numériques qui tentent de résoudre sans approximation (sur le modèle) les équations de Maxwell. Le coût numérique de résolution des problèmes de diffusion avec les méthodes numériques a conduit au développement de méthodes approchées. Les deux approximations principales sont l'approximation de Kirchhoff du premier ordre [20] (KA, Kirchhoff Approximation) et la méthode des petites perturbations [21] (SPM, Small Perturbation Method). Dans la méthode KA, le champ à la surface est assimilé au champ qui serait produit sur un plan tangent au même point. La méthode SPM est aussi connu sous le nom de théorie de Bragg. Il s'agit d'un développement perturbatif de l'amplitude par rapport à un paramètre de faible hauteur. La diffusion de surface étant largement étudiée par ailleurs, nous ne nous y intéressons pas particulièrement. Nous avons cependant mis au point un outil pour le calcul de la diffusion d'un milieu stratifié rugueux (Voir [22] et Annexe G).

La diffusion volumique est moins étudiée que la diffusion surfacique. Néanmoins, des méthodes similaires à celle de la diffusion surfacique ont été mise au point. Ces méthodes ont été appliqués par de nombreux auteurs au cas de l'objet inhomogène diélectrique [23, 24, 25] dans de nombreux domaines. Pour illustrer la grande variété d'applications, deux exemples sont présentés.

Dans le cadre des études des sols (terrestre ou marin), les méthodes SPM (comme pour le cas surfacique mais adapté au cas volumique) [26] ou d'*éléments finis temporelles* [27] (TDFEM, Time Domain Finite Element Method) sont utilisées. Elles permettent de modéliser la diffusion des sols et après analyse de déduire une cartographie du sol et de sa composition (Résolution du problème inverse).

Dans le cadre médical, la *méthode des différences finies temporelles* [28] (FDTD, Finite Difference Time Domain) peut permettre de modéliser la diffusion électromagnétique des cellules. En effet, ce milieu compliqué subit de nombreuses variations de son indice car il est composé de nombreux éléments. Ainsi, la cellule provoque une diffusion volumique de la lumière. Les cellules cancéreuses ont un spectre de diffusion de la lumière différent de celui des cellules saines, et peuvent être ainsi différenciées.

Développée par Bousquet [29], Elson [30] et Amra [31], la *méthode du premier ordre* permet une résolution analytique du problème de la diffusion. Toutefois, elle est encore une fois limitée au cas diélectrique. L'absence de traitement pour les fluctuations de permittivité et de perméabilité nous a poussé à proposer une extension au cas magnétique de cette méthode. Le travail a mis en évidence une contribution essentielle de la fluctuation de perméabilité. En effet, cette fluctuation apporte une source supplémentaire dans le calcul du champ diffusé.

Le peu d'attention porté à la perméabilité s'explique par le fait que jusqu'ici la diffusion électromagnétique n'intervenait principalement que dans le domaine optique (pour

lequel $\mu_r = 1$ dans tous les matériaux “naturels”). Dans le domaine hyperfréquence (micro-ondes) aucune méthode n’avait été développée pour le calcul de la diffusion par des fluctuations de perméabilité. Aujourd’hui la perméabilité retrouve de l’intérêt dans certains domaines de l’optique. En effet, les métamatériaux, matériaux structurés à des échelles petites devant la longueur d’onde, peuvent être décrit par une permittivité et une perméabilité effective à des longueurs d’onde jusqu’alors inatteignables. Aussi, la mise en place d’une méthode de calcul du champ diffusé par un milieu possédant des fluctuations de permittivité et de perméabilité est devenue indispensable tant pour l’optique que pour l’hyperfréquence.

Nous avons donc mis en place une méthode de résolution de la diffusion par une approche du premier ordre pour des milieux possédant des fluctuations de permittivité et de perméabilité. Après avoir établi les systèmes d’équations à résoudre au Chapitre 1 pour des empilements. Nous avons résolu le système soit directement avec une méthode matricielle : EMFORS au Chapitre 2 soit analytiquement en utilisant les admittances : ABE au Chapitre 3. La méthode RECY du Chapitre 4 tire parti de l’approximation du premier ordre pour obtenir la diffusion à l’aide du principe de réciprocité. Elle a été développée dans le but de l’appliquer à des milieux complexes.

Chapitre 1

Diffusion électromagnétique - Méthode du premier ordre

Nous définissons le champ diffusé comme étant le champ supplémentaire généré par les *fluctuations* de l'état *idéal*.

La notion de fluctuation est très importante. En effet, notre approche est basée sur une approximation du premier ordre, aussi nous ne pourrons appliquer une théorie des perturbations qu'à partir d'un état idéal légèrement modifié.

Après avoir défini toutes les grandeurs utilisées dans les équations de Maxwell qui sont la base de notre étude, nous traiterons ces équations dans le cadre de la théorie des perturbations qui permet de prendre en compte de façon rigoureuse des grandeurs discontinues (ce qui est notre cas étant donné les interfaces que nous traiterons). Nous nous placerons ensuite dans le cadre d'une approximation du premier ordre pour simplifier les systèmes à résoudre. Finalement, les fonctions de Green nous permettront d'obtenir analytiquement les solutions des systèmes d'équations, qui seront entièrement résolus par les méthodes présentées aux Chapitres 2 et 3.

1.1 Équations de Maxwell

Les équations de Maxwell permettent de décrire la réponse d'un objet soumis à un champ électromagnétique. Il s'agit d'un système de quatre équations. À chacune d'entre elles a été associée un nom qui rend hommage aux physiciens ayant contribué à leur découverte. Nous les donnerons sous leur forme locale moderne. Nous verrons qu'elles font intervenir quatre variables : deux champs (magnétique et électrique) et deux inductions (magnétique et électrique). Ces équations sont valables quel que soit le milieu. En revanche le champ électrique (resp. magnétique) est relié à l'induction électrique (resp. magnétique) par une relation supplémentaire, dite relation constitutive, caractéristique du matériau. Nous considérerons des matériaux linéaires, macroscopiques et isotropes.

- Équation de Maxwell-Gauss : elle montre que les charges électriques (ou monopoles) sont les sources de l'induction électrique.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \tag{1.1}$$

- Équation de Maxwell-Thomson : elle montre que l'induction magnétique est un vecteur solénoïdal (à divergence nulle) et qu'il n'existe pas de monopole magnétique.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.2)$$

- Équation de Maxwell-Faraday : elle montre que la présence du champ électrique est due aux variations temporelles de l'induction magnétique.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

- Équation de Maxwell-Ampère : elle montre que la présence d'un champ magnétique est due au courant électrique et aux variations temporelles de l'induction électrique.

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1.4)$$

où

- \vec{E} désigne le champ électrique ($\text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{s}^{-3}$).
- \vec{D} désigne l'induction électrique ($\text{s} \cdot \text{A} \cdot \text{m}^{-2}$).

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_e \quad (1.5)$$

- \vec{P}_e désigne la polarisation électrique ($\text{s} \cdot \text{A} \cdot \text{m}^{-2}$).

$$\vec{P}_e = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (1.6)$$

- $\varepsilon_0 = (36\pi \cdot 10^9)^{-1}$ est la permittivité du vide ($\text{s}^4 \cdot \text{A}^2 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$).
- χ_e désigne la susceptibilité électrique (1), reliée à ε_r la permittivité relative du milieu (1).

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e \quad (1.7)$$

- ρ désigne la densité volumique de charges électriques ($\text{s} \cdot \text{A} \cdot \text{m}^{-3}$).
- \vec{H} désigne le champ magnétique ($\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$).
- \vec{B} désigne l'induction magnétique ($\text{kg} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$).

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{P}_m \quad (1.8)$$

- \vec{P}_m désigne la polarisation magnétique ($\text{kg} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$).

$$\vec{P}_m = \mu_0 \chi_m \vec{H} \quad (1.9)$$

- $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ est la perméabilité du vide ($\text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}$).
- χ_m désigne la susceptibilité magnétique (1), reliée à μ_r la perméabilité relative du milieu (1).

$$\mu_r = 1 + \chi_m \quad (1.10)$$

- \vec{J} désigne la densité volumique de courants électriques ($\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$).

Nous nous plaçons en dépendance temporelle harmonique $e^{-i\omega t}$, avec $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = 2\pi\nu$, la pulsation temporelle (s^{-1}), λ la longueur d'onde dans le vide (m), ν la fréquence dans le vide (s^{-1}) et $c = (\sqrt{\varepsilon_0\mu_0})^{-1}$ la vitesse de la lumière dans le vide ($m \cdot s^{-1}$). Dans un milieu sans source ($\vec{J} = \vec{0}$ et $\rho = 0$), les équations de Maxwell s'écrivent finalement :

$$\vec{\nabla} \cdot (\varepsilon \vec{E}) = 0 \quad (1.11a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{H}) = 0 \quad (1.11b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} - i\omega\mu\vec{H} = \vec{0} \quad (1.11c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} + i\omega\varepsilon\vec{E} = \vec{0} \quad (1.11d)$$

avec $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ et $\mu = \mu_0\mu_r$.

Les équations (1.11) sont les équations de Maxwell harmoniques, valides dans tout système de coordonnées (cf. Annexe A).

1.2 Traitement général de géométries 1D par la théorie des distributions

Les équations de Maxwell pour un milieu discontinu doivent être prises au sens des distributions [32]. En effet, au sens des fonctions, l'application du rotationnel ($\vec{\nabla} \times$) et de la divergence ($\vec{\nabla} \cdot$) des champs ne serait pas possible en présence d'une interface, par exemple, car il est mathématiquement incorrect de dériver une fonction discontinue, il est en revanche possible de dériver indéfiniment une distribution. Si les champs sont des distributions quelconques, le développement analytique est limité. En supposant que les champs suivent les mêmes discontinuités que la matière, il est possible de les décrire à l'aide de distributions de Heaviside (que l'on appellera parfois abusivement fonction) dont nous connaissons parfaitement les dérivées (cf. Annexe B).

La distribution de Heaviside est défini comme :

$$\mathcal{H}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ 1 & \text{si } z > 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

En effet, il est possible de décrire le milieu caractérisé par des variations spatiales discontinues de propriétés (ε, μ) à l'aide de fonctions continues et de distributions de Heaviside. Cette description n'est pas toujours simple à voir et nous supposons dans la suite que les objets étudiés ne possèdent de discontinuité que sur une seule coordonnée u^1 .

Sont ainsi décrits dans un système cylindrique ou sphérique, des objets (cylindres/sphères) concentriques ($u^1 = r$) et dans le système rectangulaire des objets (parallélépipède rectangle) empilés selon la direction u^1 ($u^1 = z$, *choix arbitraire*). Ces objets 1D peuvent constituer une approximation de nombreux objets réels et sont traitables analytiquement via les fonctions de Heaviside de façon assez poussée. Nous allons donc nous intéresser

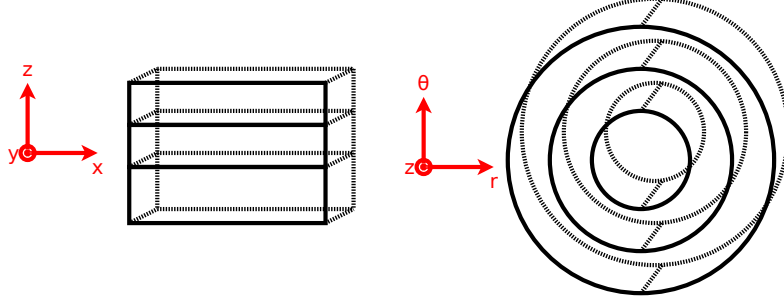


Figure 1.1 – Représentation de configurations traitables par la description présentée des variables discontinues.

exclusivement à ce type de structure, homogène par morceaux. Nous allons ainsi obtenir en partant des équations de Maxwell les équations pour chaque milieu ainsi que les équations pour les conditions de raccordements aux interfaces.

Si la permittivité et la perméabilité s'écrivent sous la forme (1.13), avec \vec{u} représentant n'importe quel système de coordonnées orthogonales, les champs s'écriront sous la même forme.

$$\zeta(u^1, u^2, u^3) = \zeta_1 + \sum_i \delta\zeta_i \mathcal{H}(u^1 - u_i^1), \quad (1.13)$$

avec : $\delta\zeta_i = \zeta_{i+1} - \zeta_i$. ζ_i et ζ_{i+1} étant la valeur de part et d'autre de l'interface.

En utilisant cette formulation pour l'ensemble des grandeurs discontinues, il est possible de reformuler les équations de Maxwell (1.11) pour des milieux discontinus. L'équation de Maxwell-Faraday devient :

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E}_1 + \sum_i \delta\vec{E}_i \mathcal{H}(u^1 - u_i^1) \right) - i\omega \left(\mu_1 + \sum_i \delta\mu_i \mathcal{H}(u^1 - u_i^1) \right) \left(\vec{H}_1 + \sum_i \delta\vec{H}_i \mathcal{H}(u^1 - u_i^1) \right) = \vec{0}$$

Il y a deux difficultés dans cette équation : le rotationnel $\vec{\nabla} \times \left(\delta\vec{E}_i \mathcal{H}(u^1 - u_i^1) \right)$ et le produit des sommes. En utilisant (C.4) nous avons :

$$\vec{\nabla} \times \left(\delta\vec{E}_i \mathcal{H}(u^1 - u_i^1) \right) = \mathcal{H}(u^1 - u_i^1) \vec{\nabla} \times \delta\vec{E}_i + \vec{\nabla} \mathcal{H}(u^1 - u_i^1) \times \delta\vec{E}_i. \quad (1.14)$$

En utilisant la définition du gradient dans l'espace des coordonnées généralisées orthogonales (cf. Annexe A) et la dérivée de la distribution de Heaviside (cf. Annexe B), nous obtenons finalement :

$$\vec{\nabla} \times \left(\delta\vec{E}_i \mathcal{H}(u^1 - u_i^1) \right) = \mathcal{H}(u^1 - u_i^1) \vec{\nabla} \times \delta\vec{E}_i + \frac{1}{h_1} \vec{e}_1 \times \delta\vec{E}_i \delta_{u_i^1}. \quad (1.15)$$

où \vec{e}_1 est le vecteur unitaire unité de la composante u^1 (cf. Annexe A) et $\delta_{u_i^1}$ est la distribution qui associé à la fonction test $\varphi(u^1)$ la valeur $\varphi(u_i^1)$ (cf. Annexe B), avec u_i^1 la valeur de la coordonnée u^1 à l'interface i .

Le produit des sommes est plus délicat et pour simplifier nous traiterons le cas de 3 interfaces (i=1,2,3) soit 4 milieux. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
& \vec{\nabla} \times \vec{E}_1 \\
& + \vec{\nabla} \times \delta \vec{E}_1 \mathcal{H}(u^1 - u_1^1) + \vec{\nabla} \times \delta \vec{E}_2 \mathcal{H}(u^1 - u_2^1) + \vec{\nabla} \times \delta \vec{E}_3 \mathcal{H}(u^1 - u_3^1) \\
& + \frac{1}{h_1} \vec{v}_1 \times \delta \vec{E}_1 \delta_{u_1^1} + \frac{1}{h_1} \vec{v}_1 \times \delta \vec{E}_2 \delta_{u_2^1} + \frac{1}{h_1} \vec{v}_1 \times \delta \vec{E}_3 \delta_{u_3^1} \\
& = \omega \left[\mu_1 \vec{H}_1 \right. \\
& + \delta \mu_1 \mathcal{H}(u^1 - u_1^1) \delta \vec{H}_1 \mathcal{H}(u^1 - u_1^1) + \delta \mu_1 \mathcal{H}(u^1 - u_1^1) \delta \vec{H}_2 \mathcal{H}(u^1 - u_2^1) + \delta \mu_1 \mathcal{H}(u^1 - u_1^1) \delta \vec{H}_3 \mathcal{H}(u^1 - u_3^1) \\
& + \delta \mu_2 \mathcal{H}(u^1 - u_2^1) \delta \vec{H}_1 \mathcal{H}(u^1 - u_1^1) + \delta \mu_2 \mathcal{H}(u^1 - u_2^1) \delta \vec{H}_2 \mathcal{H}(u^1 - u_2^1) + \delta \mu_2 \mathcal{H}(u^1 - u_2^1) \delta \vec{H}_3 \mathcal{H}(u^1 - u_3^1) \\
& + \delta \mu_3 \mathcal{H}(u^1 - u_3^1) \delta \vec{H}_1 \mathcal{H}(u^1 - u_1^1) + \delta \mu_3 \mathcal{H}(u^1 - u_3^1) \delta \vec{H}_2 \mathcal{H}(u^1 - u_2^1) + \delta \mu_3 \mathcal{H}(u^1 - u_3^1) \delta \vec{H}_3 \mathcal{H}(u^1 - u_3^1) \\
& \left. + \vec{H}_1 \delta \mu_1 \mathcal{H}(u^1 - u_1^1) + \vec{H}_1 \delta \mu_2 \mathcal{H}(u^1 - u_2^1) + \vec{H}_1 \delta \mu_3 \mathcal{H}(u^1 - u_3^1) \right. \\
& \left. + \mu_1 \delta \vec{H}_1 \mathcal{H}(u^1 - u_1^1) + \mu_1 \delta \vec{H}_2 \mathcal{H}(u^1 - u_2^1) + \mu_1 \delta \vec{H}_3 \mathcal{H}(u^1 - u_3^1) \right]
\end{aligned}$$

Le produit des Heaviside se traite aisément en notant la règle suivante :

$$Si \ u_i^1 \leq u_j^1, \text{ alors } \mathcal{H}(u^1 - u_i^1) \mathcal{H}(u^1 - u_j^1) = \mathcal{H}(u^1 - u_j^1), \quad (1.16)$$

et en sachant que les u_i^1 sont ordonnées ($u_1^1 < u_2^1 < \dots$). La représentation graphique des distributions de Heaviside (cf. Figure 1.2) est une démonstration suffisante de cette règle.

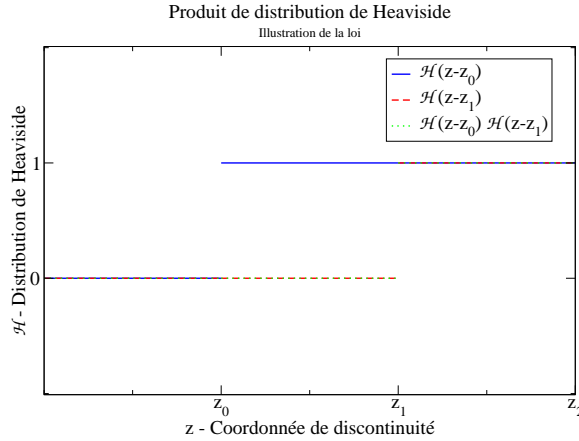


Figure 1.2 – Représentation de la règle du produit de Heaviside.

L'équation de Maxwell se simplifie en utilisant la règle du produit des Heaviside.

$$\begin{aligned}
& \vec{\nabla} \times \vec{E}_1 \\
& + \vec{\nabla} \times \delta \vec{E}_1 \mathcal{H}(u^1 - u_1^1) + \vec{\nabla} \times \delta \vec{E}_2 \mathcal{H}(u^1 - u_2^1) + \vec{\nabla} \times \delta \vec{E}_3 \mathcal{H}(u^1 - u_3^1) \\
& + \frac{1}{h_1} \vec{v}_1 \times \delta \vec{E}_1 \delta_{u_1^1} + \frac{1}{h_1} \vec{v}_1 \times \delta \vec{E}_2 \delta_{u_2^1} + \frac{1}{h_1} \vec{v}_1 \times \delta \vec{E}_3 \delta_{u_3^1} \\
& = \omega \left[\mu_1 \vec{H}_1 \right. \\
& + \delta \mu_1 \delta \vec{H}_1 \mathcal{H}(u^1 - u_1^1) + \delta \mu_1 \delta \vec{H}_2 \mathcal{H}(u^1 - u_2^1) + \delta \mu_1 \delta \vec{H}_3 \mathcal{H}(u^1 - u_3^1) \\
& + \delta \mu_2 \delta \vec{H}_1 \mathcal{H}(u^1 - u_2^1) + \delta \mu_2 \delta \vec{H}_2 \mathcal{H}(u^1 - u_2^1) + \delta \mu_2 \delta \vec{H}_3 \mathcal{H}(u^1 - u_3^1) \\
& + \delta \mu_3 \delta \vec{H}_1 \mathcal{H}(u^1 - u_3^1) + \delta \mu_3 \delta \vec{H}_2 \mathcal{H}(u^1 - u_3^1) + \delta \mu_3 \delta \vec{H}_3 \mathcal{H}(u^1 - u_3^1) \\
& \left. + \vec{H}_1 \delta \mu_1 \mathcal{H}(u^1 - u_1^1) + \vec{H}_1 \delta \mu_2 \mathcal{H}(u^1 - u_2^1) + \vec{H}_1 \delta \mu_3 \mathcal{H}(u^1 - u_3^1) \right. \\
& \left. + \mu_1 \delta \vec{H}_1 \mathcal{H}(u^1 - u_1^1) + \mu_1 \delta \vec{H}_2 \mathcal{H}(u^1 - u_2^1) + \mu_1 \delta \vec{H}_3 \mathcal{H}(u^1 - u_3^1) \right]
\end{aligned}$$

Après factorisation, nous identifions les termes, nous avons alors :

– Le terme en 1

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_1 = \omega \mu_1 \vec{H}_1$$

– Le terme en $\mathcal{H}(u^1 - u_1^1)$

$$\vec{\nabla} \times \delta \vec{E}_1 = \omega \left(\delta \mu_1 \delta \vec{H}_1 + \vec{H}_1 \delta \mu_1 + \mu_1 \delta \vec{H}_1 \right)$$

– Le terme en $\mathcal{H}(u^1 - u_2^1)$

$$\vec{\nabla} \times \delta \vec{E}_2 = \omega \left(\delta \mu_1 \delta \vec{H}_2 + \delta \mu_2 \delta \vec{H}_1 + \delta \mu_2 \delta \vec{H}_2 + \vec{H}_1 \delta \mu_2 + \mu_1 \delta \vec{H}_2 \right)$$

– Le terme en $\mathcal{H}(u^1 - u_3^1)$

$$\vec{\nabla} \times \delta \vec{E}_3 = \omega \left(\delta \mu_1 \delta \vec{H}_3 + \delta \mu_2 \delta \vec{H}_3 + \delta \mu_3 \delta \vec{H}_1 + \delta \mu_3 \delta \vec{H}_2 + \delta \mu_3 \delta \vec{H}_3 + \vec{H}_1 \delta \mu_3 + \mu_1 \delta \vec{H}_3 \right)$$

– Le terme en $\delta_{u_1^1}$

$$\frac{1}{h_1} \vec{i}_1 \times \delta \vec{E}_1(u_1^1, u^2, u^3) = \vec{0}$$

– Le terme en $\delta_{u_2^1}$

$$\frac{1}{h_1} \vec{i}_1 \times \delta \vec{E}_2(u_2^1, u^2, u^3) = \vec{0}$$

– Le terme en $\delta_{u_3^1}$

$$\frac{1}{h_1} \vec{i}_1 \times \delta \vec{E}_3(u_3^1, u^2, u^3) = \vec{0}$$

Nous retrouvons des conditions de sauts des composantes tangentielles du champ selon la normale à l'interface \vec{i}_1 (terme en $\delta_{u_i^1}$), ainsi, que l'équation de Maxwell dans le premier milieu (terme en 1).

Pour les autres termes (en $\mathcal{H}(u^1 - u_i^1)$), les équations sont retravaillées. Le terme en $\mathcal{H}(u^1 - u_1^1)$ devient en remplaçant les $\delta \zeta_i = \zeta_{i+1} - \zeta_i$:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1 \right) = \omega \left((\mu_2 - \mu_1)(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) + \vec{H}_1(\mu_2 - \mu_1) + \mu_1(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \right)$$

Nous développons les produits et nous simplifions :

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1 \right) = \omega \left(\mu_2 \vec{H}_2 - \mu_2 \vec{H}_1 - \mu_1 \vec{H}_2 + \mu_1 \vec{H}_1 + \mu_2 \vec{H}_1 - \mu_1 \vec{H}_1 + \mu_1 \vec{H}_2 - \mu_1 \vec{H}_1 \right)$$

Nous obtenons alors :

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1 \right) = \omega \left(\mu_2 \vec{H}_2 - \mu_1 \vec{H}_1 \right)$$

Le terme en 1, nous permet d'obtenir finalement :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_2 = \omega \mu_2 \vec{H}_2$$

En procédant de la même façon pour le terme en $\mathcal{H}(u^1 - u_2^1)$, nous obtenons

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_3 = \omega \mu_3 \vec{H}_3$$

Et pour le terme en $\mathcal{H}(u^1 - u_3^1)$,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_4 = \omega \mu_4 \vec{H}_4$$

La simplification est généralisable pour tous i et peut être également effectuée sur l'équation de Maxwell-Ampère.

Finalement, dans chaque milieu i les champs vérifient les équations de Maxwell :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_i(u^1, u^2, u^3) = \omega \mu_i \vec{H}_i(u^1, u^2, u^3) \quad (1.17a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}_i(u^1, u^2, u^3) = -\omega \varepsilon_i \vec{E}_i(u^1, u^2, u^3) \quad (1.17b)$$

et sont raccordés grâce aux relations aux interfaces j (situé en u_j^1) :

$$\vec{\tau}_1 \times \delta \vec{E}_j(u_j^1, u^2, u^3) = \vec{0} \quad (1.18a)$$

$$\vec{\tau}_1 \times \delta \vec{H}_j(u_j^1, u^2, u^3) = \vec{0} \quad (1.18b)$$

1.3 Approximation du premier ordre

Nous nous intéressons maintenant au calcul du champ diffusé par une variation des propriétés du matériau constituant le milieu (permittivité/perméabilité). Il existe pour cela un grand nombre de méthodes mises au point essentiellement pour des milieux non magnétiques ($\mu_r = 1$) [23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31]. C'est pourquoi, nous nous proposons d'étendre certaines de ces méthodes à des milieux magnétiques. Parmi toutes les approches disponibles, l'approximation du premier ordre est celle que nous avons jugé la plus intéressante. En effet, grâce à cette approximation, nous pouvons résoudre simplement le problème de la diffusion volumique. Elle nous permet également d'obtenir une solution analytique. Enfin, elle nous donne une source équivalente à une inhomogénéité, élément-clé de l'utilisation de notre méthode RECY (cf. Chapitre 4).

Les fluctuations de propriétés des matériaux constituant l'objet d'étude, peuvent être écrites sous la forme d'une fluctuation autour d'une valeur idéale.

$$\tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon_i (1 + p_i(u^1, u^2, u^3)), \quad (1.19a)$$

$$\tilde{\mu}_i = \mu_i (1 + q_i(u^1, u^2, u^3)), \quad (1.19b)$$

où p (resp. q) est la fonction caractérisant les fluctuations de permittivité (resp. de perméabilité) autour de la valeur idéale ε_i (resp. μ_i). p et q sont considérés comme petites devant 1 et donc peuvent faire l'objet d'une théorie des perturbations. L'approximation du premier ordre consiste alors à ne garder que les termes d'ordre un en p et q (le produit pq est d'ordre deux).

Cherchons donc une solution du système (1.17) sous la forme d'un développement des champs électromagnétiques en puissance de p et q :

$$\vec{E} = \vec{E}^{(0)} + \left[p \vec{E}_p^{(1)} + q \vec{E}_q^{(1)} \right] + \left[\frac{p^2}{2} \vec{E}_p^{(2)} + \frac{q^2}{2} \vec{E}_q^{(2)} + \frac{pq}{2} \vec{E}_{pq}^{(2)} \right] + \mathcal{O}^3 \quad (1.20a)$$

$$\vec{H} = \vec{H}^{(0)} + \left[p\vec{H}_p^{(1)} + q\vec{H}_q^{(1)} \right] + \left[\frac{p^2}{2}\vec{H}_p^{(2)} + \frac{q^2}{2}\vec{H}_q^{(2)} + \frac{pq}{2}\vec{H}_{pq}^{(2)} \right] + \mathcal{O}^3 \quad (1.20b)$$

En remplaçant dans (1.20a), nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \vec{\nabla} \times \vec{E}^{(0)} - \imath\omega\mu\vec{H}^{(0)} \\ & + \vec{\nabla} \times \left[p\vec{E}_p^{(1)} + q\vec{E}_q^{(1)} \right] - \imath\omega\mu \left[p\vec{H}_p^{(1)} + q\vec{H}_q^{(1)} \right] - \imath\omega\mu q\vec{H}^{(0)} \\ & + \vec{\nabla} \times \left[\frac{p^2}{2}\vec{E}_p^{(2)} + \frac{q^2}{2}\vec{E}_q^{(2)} + \frac{pq}{2}\vec{E}_{pq}^{(2)} \right] - \imath\omega\mu \left[\frac{p^2}{2}\vec{H}_p^{(2)} + \frac{q^2}{2}\vec{H}_q^{(2)} + \frac{pq}{2}\vec{H}_{pq}^{(2)} \right] - \\ & \imath\omega\mu q \left[p\vec{H}_p^{(1)} + q\vec{H}_q^{(1)} \right] + \mathcal{O}^3 = \vec{0} \end{aligned}$$

En égalisant pour chaque ordre, nous avons :

$$\begin{aligned} & \vec{\nabla} \times \vec{E}^{(0)} - \imath\omega\mu\vec{H}^{(0)} = \vec{0} \\ & \vec{\nabla} \times \left[p\vec{E}_p^{(1)} + q\vec{E}_q^{(1)} \right] - \imath\omega\mu \left[p\vec{H}_p^{(1)} + q\vec{H}_q^{(1)} \right] = \imath\omega\mu q\vec{H}^{(0)} \\ & \vec{\nabla} \times \left[\frac{p^2}{2}\vec{E}_p^{(2)} + \frac{q^2}{2}\vec{E}_q^{(2)} + \frac{pq}{2}\vec{E}_{pq}^{(2)} \right] - \imath\omega\mu \left[\frac{p^2}{2}\vec{H}_p^{(2)} + \frac{q^2}{2}\vec{H}_q^{(2)} + \frac{pq}{2}\vec{H}_{pq}^{(2)} \right] = \imath\omega\mu q \left[p\vec{H}_p^{(1)} + q\vec{H}_q^{(1)} \right] \end{aligned}$$

De même avec (1.20b), nous avons :

$$\begin{aligned} & \vec{\nabla} \times \vec{H}^{(0)} + \imath\omega\varepsilon\vec{E}^{(0)} = \vec{0} \\ & \vec{\nabla} \times \left[p\vec{H}_p^{(1)} + q\vec{H}_q^{(1)} \right] + \imath\omega\varepsilon \left[p\vec{E}_p^{(1)} + q\vec{E}_q^{(1)} \right] = -\imath\omega\varepsilon p\vec{E}^{(0)} \\ & \vec{\nabla} \times \left[\frac{p^2}{2}\vec{H}_p^{(2)} + \frac{q^2}{2}\vec{H}_q^{(2)} + \frac{pq}{2}\vec{H}_{pq}^{(2)} \right] + \imath\omega\varepsilon \left[\frac{p^2}{2}\vec{E}_p^{(2)} + \frac{q^2}{2}\vec{E}_q^{(2)} + \frac{pq}{2}\vec{E}_{pq}^{(2)} \right] = -\imath\omega\varepsilon p \left[p\vec{E}_p^{(1)} + q\vec{E}_q^{(1)} \right] \end{aligned}$$

En notant :

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(0)} &= \vec{E}^{d(0)}, \\ \left[p\vec{E}_p^{(1)} + q\vec{E}_q^{(1)} \right] &= \vec{E}^{d(1)}, \\ \left[\frac{p^2}{2}\vec{E}_p^{(2)} + \frac{q^2}{2}\vec{E}_q^{(2)} + \frac{pq}{2}\vec{E}_{pq}^{(2)} \right] &= \vec{E}^{d(2)}, \\ \vec{H}^{(0)} &= \vec{H}^{d(0)}, \\ \left[p\vec{H}_p^{(1)} + q\vec{H}_q^{(1)} \right] &= \vec{H}^{d(1)}, \\ \left[\frac{p^2}{2}\vec{H}_p^{(2)} + \frac{q^2}{2}\vec{H}_q^{(2)} + \frac{pq}{2}\vec{H}_{pq}^{(2)} \right] &= \vec{H}^{d(2)}, \end{aligned}$$

nous avons ainsi de façon abrégé :

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}^{d(i)} + \imath\omega\varepsilon\vec{E}^{d(i)} = -\imath\omega\varepsilon p\vec{E}^{d(i-1)} \quad (1.21)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}^{d(i)} - \imath\omega\mu\vec{H}^{d(i)} = \imath\omega\mu q\vec{H}^{d(i-1)} \quad (1.22)$$

pour tout $i \geq 0$ où $\vec{H}^{d(-1)}$ et $\vec{E}^{d(-1)}$ sont tous les deux nuls.

Nous pouvons donc obtenir par récurrence le champ diffusé à tous les ordres. Sachant que l'ordre 0 est le cas où il n'y a pas de fluctuation, l'objet est donc idéal.

Nous ne conserverons dans la suite de ce manuscrit que l'ordre zéro et un. Nous écrirons alors simplement pour chaque milieu que le champ homogène est donné par l'ordre zéro :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_i^0(u^1, u^2, u^3) - \omega\mu_i \vec{H}_i^0(u^1, u^2, u^3) = \vec{0} \quad (1.23a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}_i^0(u^1, u^2, u^3) + \omega\varepsilon_i \vec{E}_i^0(u^1, u^2, u^3) = \vec{0} \quad (1.23b)$$

et que le champ diffusé (d'ordre un) par l'ordre un :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_i^d(u^1, u^2, u^3) - \omega\mu_i \vec{H}_i^d(u^1, u^2, u^3) = \vec{M}_i(u^1, u^2, u^3) \quad (1.24a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}_i^d(u^1, u^2, u^3) + \omega\varepsilon_i \vec{E}_i^d(u^1, u^2, u^3) = -\vec{J}_i(u^1, u^2, u^3) \quad (1.24b)$$

avec \vec{M} un courant magnétique ($\text{kg} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{s}^{-3}$) et \vec{J} un courant électrique ($\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$) donnés par (1.24c) et (1.24d).

$$\vec{M}_i(u^1, u^2, u^3) = \omega\mu_i q_i(u^1, u^2, u^3) \vec{H}_i^0(u^1, u^2, u^3) \quad (1.24c)$$

$$\vec{J}_i(u^1, u^2, u^3) = \omega\varepsilon_i p_i(u^1, u^2, u^3) \vec{E}_i^0(u^1, u^2, u^3) \quad (1.24d)$$

Cette approximation revient à celle de Born qui suppose le champ idéal est très supérieur au champ diffusé. Le champ total dans le terme source est ainsi remplacé par le champ idéal.

Le système d'équation (1.24) a pour solution $\vec{X}_i^d = \vec{X}_i^{d'} + \vec{X}_i^{d*}$, où :

- $\vec{X}_i^{d'}$ est la solution homogène (ce qui revient à l'équation 1.23) .
- \vec{X}_i^{d*} est la solution particulière calculée en utilisant la fonction de Green.

La résolution de (1.23) n'est pas évidente pour un système de coordonnées quelconques. Néanmoins, de nombreux codes permettent d'obtenir aujourd'hui le champ idéal pour une géométrie quelconque. L'approximation du premier ordre nous permet alors de remplacer l'inhomogénéité en une source équivalente de premier ordre pour un objet quelconque. Cette transformation est la base de l'application du théorème de réciprocité de la méthode RECY (cf. Chapitre 4). Mais avant d'exposer cette méthode, nous allons nous placer dans un système simplifié où l'équation (1.23) a une solution quasi-analytique (il reste la résolution du système d'équations aux interfaces).

1.4 Équations du vecteur d'onde

Comme nous l'avons fait remarquer, il n'est pas facile de résoudre (1.23) dans un système de coordonnées quelconques. C'est pourquoi, nous nous placerons désormais en coordonnées rectangulaires (x, y, z) , en considérant uniquement des empilements de couches selon la direction z (cf. Figure 1.3). Le système de coordonnées rectangulaires nous permet de pouvoir résoudre nous-même le système d'équation (1.24) et de ainsi d'obtenir une solution analytique (cf. Chapitre 3).

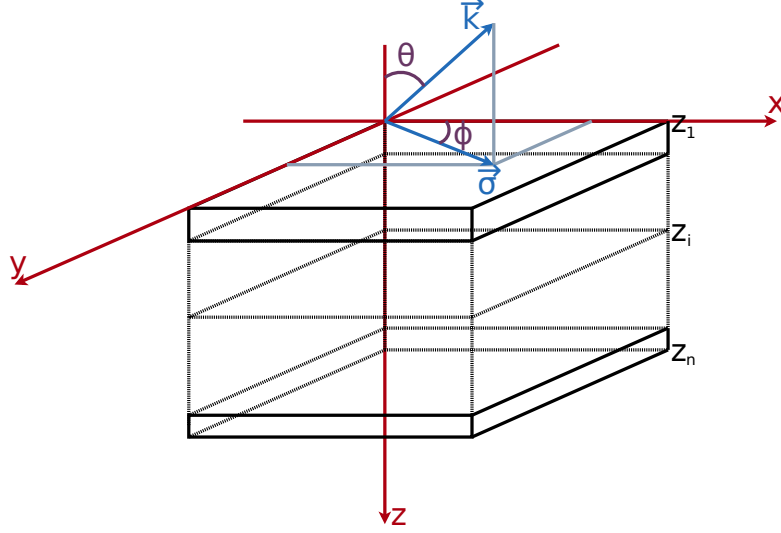


Figure 1.3 – Représentation du multicouche idéal dans le système de coordonnées rectangulaire. \vec{k} est le vecteur d'onde, défini par deux angles θ , l'angle normale et ϕ , l'angle polaire et sa norme k . Les interfaces sont localisées en z_i .

En appliquant le rotationnel ($\vec{\nabla} \times$) sur les équations de Maxwell (1.24a) et (1.24b), nous obtenons les équations découplées dites du vecteur d'onde (Vector Wave Equation) pour le champ électrique (1.25a) et magnétique (1.25b).

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E}_i^d - k_i^2 \vec{E}_i^d = -\omega \mu_i \vec{J}_i + \vec{\nabla} \times \vec{M}_i \quad (1.25a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H}_i^d - k_i^2 \vec{H}_i^d = -\omega \varepsilon_i \vec{M}_i - \vec{\nabla} \times \vec{J}_i \quad (1.25b)$$

où k_i (m^{-1}) est donné par (1.26).

$$k_i^2 = \omega^2 \mu_i \varepsilon_i \quad (1.26)$$

Les équations (1.25a) et (1.25b) sont à distinguer des équations d'Helmholtz [33], où le rotationnel du rotationnel ($\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times$) est développé en utilisant la propriété (C.1).

Nous cherchons à résoudre (1.25a) et (1.25b). La dualité des deux équations (1.25a) et (1.25b), nous permet de les écrire sous une forme commune :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{X} - k^2 \vec{X} = \vec{S}' + \vec{\nabla} \times \vec{S}'' \quad (1.27)$$

1.4.1 Dualité

La dualité des équations de Maxwell se vérifie en utilisant les correspondances suivantes :

- $\vec{E} \rightarrow \vec{H}$
- $\vec{H} \rightarrow -\vec{E}$
- $\varepsilon \rightarrow \mu$
- $\mu \rightarrow \varepsilon$
- $p \rightarrow q$
- $q \rightarrow p$

$$\begin{aligned}
- \vec{M} &= \omega\mu q \vec{H} \rightarrow -\omega\varepsilon p \vec{E} = -\vec{J} \\
- \vec{J} &= \omega\varepsilon p \vec{E} \rightarrow \omega\mu q \vec{H} = \vec{M}
\end{aligned}$$

L'équation (1.25a) devient alors (1.25b) et inversement.

Cette dualité des équations n'implique cependant pas nécessairement que les fluctuations de permittivité et de perméabilité sont équivalentes. En effet, le champ magnétique ne devient pas le champ électrique mais son opposé, le signe négatif transformera donc des sommes en soustraction, changeant ainsi considérablement la solution.

De plus, la source de l'équation du vecteur d'onde inhomogène contient les deux sources : électrique et magnétique. Il est donc impossible d'utiliser tel que les études précédentes [34] traitant uniquement des fluctuations de permittivité car l'équation du vecteur d'onde ne contient qu'une seule des deux sources et n'est alors même pas dual.

1.4.2 Solutions

En raison de la linéarité des opérateurs impliqués, nous pouvons écrire qu'une solution de (1.27) est donnée par la somme de \vec{X}' , \vec{X}_1^* et \vec{X}_{rot}^* solutions de (1.28a), (1.28b) et (1.28c).

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{X}' - k^2 \vec{X}' = \vec{0} \quad (1.28a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{X}_1^* - k^2 \vec{X}_1^* = \vec{S}' \quad (1.28b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{X}_{rot}^* - k^2 \vec{X}_{rot}^* = \vec{\nabla} \times \vec{S}'' \quad (1.28c)$$

1.4.2.1 Solution homogène \vec{X}'

L'équation (1.28a) peut être mise sous la forme d'une équation d'Helmholtz homogène (1.29), en utilisant la propriété (C.1) et la nullité de la divergence (équation de Maxwell-Gauss et Maxwell-Thomson) de la solution homogène.

$$\Delta \vec{X}' + k^2 \vec{X}' = \vec{0} \quad (1.29)$$

Pour résoudre (1.29) nous passons dans le plan de Fourier. La transformée de Fourier 2D du champ est définie par (1.30).

$$\vec{X}(\vec{r}, z) = \int_{\vec{\sigma}} \hat{\vec{X}}(\vec{\sigma}, z) e^{i\vec{\sigma} \cdot \vec{r}} d\vec{\sigma} \quad (1.30)$$

L'équation de Helmholtz devient une équation différentielle dans l'espace de Fourier :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \hat{\vec{X}}'(\vec{\sigma}, z) + \alpha^2(\sigma) \hat{\vec{X}}'(\vec{\sigma}, z) = \vec{0}$$

Avec :

$$\alpha^2(\sigma) = k^2 - \sigma^2 \quad (1.31)$$

Les solutions de (1.28a) sont donc un paquet d'ondes planes (1.32), où les coefficients \vec{A}^{X^\pm} sont déterminés à l'aide des conditions de raccordements (1.18).

$$\hat{\vec{X}}'(\vec{\sigma}, z) = \vec{A}^{X^+}(\vec{\sigma}) e^{i\alpha(\sigma)z} + \vec{A}^{X^-}(\vec{\sigma}) e^{-i\alpha(\sigma)z} \quad (1.32)$$

La solution \vec{X}' est également la solution du champ idéal \vec{X}^0 mais les coefficients associés seront différents. En effet, le système d'équation aux frontières fera intervenir pour le champ idéal une source liée au champ incident, alors que le champ diffusé homogène \vec{X}'_d fera intervenir les solutions des équations (1.28b) et (1.28c), c'est-à-dire des sources qui n'existent pas dans le calcul du champ idéal.

1.4.2.2 Solution particulière \vec{X}_1^*

Pour résoudre (1.28b), nous nous plaçons dans l'espace de Fourier (1.30). L'équation (1.28b) devient (1.33), si \vec{X} est une fonction sommable, continue et dérivable [35].

$$\hat{\nabla} \times \hat{\nabla} \times \hat{X}_1^* - k^2 \hat{X}_1^* = \hat{S}' \quad (1.33)$$

avec $\hat{\nabla}$ l'opérateur nabla dans l'espace de Fourier :

$$\hat{\nabla} = (i\vec{\sigma} + \vec{z}\partial_z) \quad (1.34)$$

Nous cherchons comme solution de (1.33), un champ s'écrivant sous la forme (1.35)

$$\hat{X}_1^* = \int_{z'} \hat{G}_1^*(\vec{\sigma}, z, \vec{r}', z') \hat{S}'(\vec{\sigma}, z') dz' \quad (1.35)$$

Nous pouvons montrer que (1.35) est solution de (1.33), si :

$$\hat{\nabla} \times \hat{\nabla} \times \hat{G}_1^*(\vec{\sigma}, z, \vec{r}', z') - k^2 \hat{G}_1^*(\vec{\sigma}, z, \vec{r}', z') = -\bar{I}\delta(z - z'), \quad (1.36)$$

en injectant (1.35) dans (1.33).

Nous pouvons écrire en utilisant la propriété (C.13), que (1.36) devient :

$$\hat{\nabla}^2 \hat{G}_1^* + \kappa^2 \hat{G}_1^* = \bar{I}\delta(z - z') + \hat{\Delta} \hat{G}_1^* \quad (1.37)$$

En appliquant $\hat{\Delta}$ sur (1.37) et en utilisant la propriété (C.14), nous obtenons :

$$\hat{\Delta} \hat{G}_1^* = \frac{\hat{\Delta}}{k^2} \delta(z - z') \quad (1.38)$$

Finalement en remplaçant (1.38) dans (1.37), nous avons :

$$\hat{\nabla}^2 \hat{G}_1^* + k^2 \hat{G}_1^* = \left(\bar{I} + \frac{\hat{\Delta}}{k^2} \right) \delta(z - z') \quad (1.39)$$

Il est alors possible de montrer que la solution de (1.39) peut s'écrire sous la forme :

$$\hat{G}_1^* = - \left(\bar{I} + \frac{\hat{\Delta}}{k^2} \right) g(z, z'), \quad (1.40)$$

avec g est solution de :

$$\hat{\nabla}^2 g + k^2 g = -\delta(z - z'), \quad (1.41)$$

en remplaçant (1.40) dans (1.39).

Comme $\hat{\nabla}^2 = -\sigma_x^2 - \sigma_y^2 + \partial_z^2$, l'équation (1.41) devient :

$$(-\sigma_x^2 - \sigma_y^2 + \partial_z^2)g + k^2g = -\delta(z - z') \quad (1.42)$$

En posant $\alpha = k^2 - \sigma_x^2 - \sigma_y^2$, nous avons :

$$\partial_z^2g + \alpha^2g = -\delta(z - z') \quad (1.43)$$

Que nous pouvons écrire :

$$-\partial_z^2g - \alpha^2g = \delta(z - z') \quad (1.44)$$

Cette équation entre dans la forme (1.45) des équations de Sturm-Liouville.

$$(-\partial_x^2 + h(x))g(x, y) = \delta(x - y) \quad (1.45)$$

Dont l'on sait mathématiquement que si deux solutions homogènes (sans second membre) linéairement indépendantes de (1.45) sont connues g_a et g_b , alors la solution générale est connue et donnée par (1.46) :

$$g(x, y) = -\frac{1}{W(y)} \begin{cases} g_a(x)g_b(y), & \text{si } x < y \\ g_a(y)g_b(x), & \text{si } x > y \end{cases} \quad (1.46)$$

où $W(y) = g_a(y)g'_b(y) - g'_a(y)g_b(y)$ est le Wronskien de g_a , g_b .

Dans notre cas, nous avons $g_a = \exp(\imath\alpha z)$ et $g_b = \exp(-\imath\alpha z)$ comme solutions homogènes de (1.44). La solution de (1.44) est donnée par :

$$g(z, z') = -\frac{1}{W(z')} \begin{cases} e^{\imath\alpha(z-z')}, & \text{si } z - z' < 0 \\ e^{-\imath\alpha(z-z')}, & \text{si } z - z' > 0 \end{cases} \quad (1.47)$$

Avec $W(z')$ donné par :

$$W(z') = -\imath\alpha e^{\imath\alpha z'} e^{-\imath\alpha z'} - \imath\alpha e^{\imath\alpha z'} e^{-\imath\alpha z'} = -2\imath\alpha \quad (1.48)$$

Ainsi :

$$g(z, z') = \frac{1}{2\imath\alpha} e^{\imath\alpha|z-z'|} \quad (1.49)$$

Finalement, la solution de (1.28b) est donnée par (1.50).

$$\hat{X}_1^* = -\frac{1}{2\imath\alpha} \left(\bar{I} + \frac{\hat{\Delta}}{k^2} \right) \int_{z'} \hat{S}'(\vec{\sigma}, z') e^{\imath\alpha|z-z'|} dz' \quad (1.50)$$

1.4.2.3 Solution particulière \vec{X}_{rot}^*

Pour résoudre (1.28c), nous nous plaçons dans l'espace de Fourier (1.30). L'équation (1.28c) devient (1.51), si \vec{X} est une fonction sommable, continue et dérivable [35].

$$\hat{\nabla} \times \hat{\nabla} \times \hat{X}_{rot}^* - k^2 \hat{X}_{rot}^* = \hat{\nabla} \times \hat{S}'' \quad (1.51)$$

La partie de la source qui s'exprime sous la forme d'un rotationnel (1.51) est à prendre avec précaution car sa divergence est nulle [36]. En cherchant une solution sous la forme (1.52)

$$\hat{X}_{rot}^* = \int_{z'} \hat{G}_{rot}^*(\vec{\sigma}, z, \vec{r}', z') \hat{S}''(\vec{\sigma}, z') dz' \quad (1.52)$$

et en injectant (1.52) dans (1.51), nous pouvons montrer que la dyade de Green \hat{G}_{rot}^* doit être solution de (1.53)

$$\hat{\nabla} \times \hat{\nabla} \times \hat{G}_{rot}^* - k^2 \hat{G}_{rot}^* = -\hat{\nabla} \times \bar{I} \delta(z - z') \quad (1.53)$$

En utilisant les propriétés démontrées dans l'Annexe C, l'équation (1.53) devient :

$$\hat{\nabla}^2 \hat{G}_{rot}^* + k^2 \hat{G}_{rot}^* = \hat{\nabla} \times \bar{I} \delta(z - z') \quad (1.54)$$

Nous pouvons montrer que la solution de (1.54) est (1.55).

$$\hat{G}_{rot}^* = -\hat{\nabla} \times \bar{I} g \quad (1.55)$$

où g est la fonction de Green solution de (1.41). Elle est donnée par (1.49).

Finalement, la solution de (1.28c) est donnée par (1.56).

$$\hat{X}_{rot}^* = -\frac{1}{2i\alpha} \left(\hat{\nabla} \times \bar{I} \right) \int_{z'} \hat{S}''(\vec{\sigma}, z') e^{i\alpha|z-z'|} dz' \quad (1.56)$$

1.4.2.4 Solution de l'équation du vecteur d'onde

Nous avons vu précédemment que la solution de l'équation (1.27), prend la forme d'une somme de solutions particulières (1.50) et (1.56) et d'une solution homogène (1.32).

Les solutions particulières \vec{X}_1^* et \vec{X}_{rot}^* sont des solutions complètement définies lorsque la solution idéale (dans le milieu sans source, ni défaut) est connue. Nous noterons \vec{X}^* comme étant la somme des deux solutions particulières \vec{X}_1^* et \vec{X}_{rot}^* .

$$\hat{X}^*(\vec{\sigma}, z) = -\frac{1}{2i\alpha} \left[\left(\bar{I} + \frac{\hat{\Delta}}{k^2} \right) \int_{z'} \hat{S}'(\vec{\sigma}, z') e^{i\alpha|z-z'|} dz' + \left(\hat{\nabla} \times \bar{I} \right) \int_{z'} \hat{S}''(\vec{\sigma}, z') e^{i\alpha|z-z'|} dz' \right]$$

La solution homogène \vec{X}' n'est pas complètement définie puisqu'elle contient encore deux coefficients \vec{A}^{X^\pm} à déterminer.

$$\vec{X}'(\vec{\sigma}, z) = \vec{A}^{X^+}(\vec{\sigma}) e^{i\alpha(\sigma)z} + \vec{A}^{X^-}(\vec{\sigma}) e^{-i\alpha(\sigma)z} \quad (1.57)$$

Pour ce faire, nous devons utiliser les relations aux interfaces (1.18) qui se réécrivent en coordonnées rectangulaires avec z la coordonnée selon laquelle les grandeurs sont discontinues (1.58).

$$\vec{z} \times \delta \vec{E}_j(x, y, z_j) = \vec{0} \quad (1.58a)$$

$$\vec{z} \times \delta \vec{H}_j(x, y, z_j) = \vec{0} \quad (1.58b)$$

Trouver les coefficients revient à résoudre un système d'équation. Il existe pour cela plusieurs méthodes, nous présentons ici, la méthode de résolution matricielle EMFORS (Chapitre 2) et celle des admittances ABE (Chapitre 3).

Chapitre 2

Méthode EMFORS

La méthode EMFORS [22] (Electromagnetic Multilayers First ORder Scattering) est une méthode matricielle. Elle permet de résoudre directement le système d'équations obtenu à chaque interface en utilisant les solutions analytiques montrées précédemment. L'avantage de cette résolution est la rapidité d'exécution, la possibilité d'avoir l'ensemble des couches qui fluctuent en même temps et sa simplicité de mise en œuvre.

La matrice et le second membre du système s'écrivent de façon simple sous forme de blocs de structure identique. Nous allons utiliser les équations aux interfaces afin de définir ces blocs puis nous écrirons symboliquement la matrice à l'aide de ces blocs.

2.1 Système d'équation aux interfaces

Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'il nous restait à déterminer les coefficients $\vec{A}^{X+}(\vec{\sigma})$ et $\vec{A}^{X-}(\vec{\sigma})$ pour le champ diffusé mais aussi pour le champ idéal.

Pour ce faire, nous allons remplacer dans les conditions de raccordement (1.58) le champ électrique par la forme de sa solution (1.57).

Pour le champ électrique nous noterons $\vec{A}^{E\pm} = \vec{A}^{\pm}$ et pour le champ magnétique $\vec{A}^{H\pm} = \vec{B}^{\pm}$.

$$\hat{\vec{E}}_i(\vec{\sigma}, z) = \vec{A}_i^+(\vec{\sigma}) e^{i\alpha_i(\sigma)z} + \vec{A}_i^-(\vec{\sigma}) e^{-i\alpha_i(\sigma)z} \quad (2.1)$$

Et nous exprimons à l'aide des équations de Maxwell, le champ magnétique en fonction du champ électrique comme :

$$\begin{aligned} \hat{\vec{H}}_i = \frac{1}{\omega\mu_i} & \left[\vec{\sigma} \times \left(\vec{A}_i^+(\vec{\sigma}) e^{i\alpha_i(\sigma)z} + \vec{A}_i^-(\vec{\sigma}) e^{-i\alpha_i(\sigma)z} \right) \right. \\ & \left. + \alpha_i(\sigma) \vec{z} \times \left(\vec{A}_i^+(\vec{\sigma}) e^{i\alpha_i(\sigma)z} - \vec{A}_i^-(\vec{\sigma}) e^{-i\alpha_i(\sigma)z} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

Le vecteur $\vec{\sigma}$ est la projection du vecteur d'onde \vec{k} dans le plan $x0y$. Il est caractérisé par l'angle polaire ϕ et l'angle normale θ .

$$\vec{\sigma} = k_1 \sin \theta (\cos \phi \vec{x} + \sin \phi \vec{y}) \quad (2.3)$$

Grâce à la dualité, il est possible de déterminer les coefficients pour le champ électrique uniquement. Pour obtenir le champ magnétique, il suffira de suivre les correspondances présentées à la section 1.4.1.

En remplaçant ainsi les champs électrique par (2.1) et magnétique par (2.2) dans les conditions de raccordement, nous obtenons un système d'équation que nous complétons avec l'équation de la divergence du champ électrique. Il suffit alors d'écrire les équations sous forme matricielle pour obtenir les amplitudes du champ homogène. C'est une méthode directe qui permet de traiter simultanément plusieurs fluctuations dans différents milieux. La seule approximation est celle du premier ordre faite sur les fluctuations.

Nous avons ainsi pour chaque interface les quatre équations suivantes :

$$\begin{aligned}
& -e^{\imath\alpha_i z_i} A_{i,x}^+ - e^{-\imath\alpha_i z_i} A_{i,x}^- + e^{\imath\alpha_{i+1} z_i} A_{i+1,x}^+ + e^{-\imath\alpha_{i+1} z_i} A_{i+1,x}^- = 0 \\
& -e^{\imath\alpha_i z_i} A_{i,y}^+ - e^{-\imath\alpha_i z_i} A_{i,y}^- + e^{\imath\alpha_{i+1} z_i} A_{i+1,y}^+ + e^{-\imath\alpha_{i+1} z_i} A_{i+1,y}^- = 0 \\
& \frac{\alpha_i}{\omega\mu_i} e^{\imath\alpha_i z_i} A_{i,x}^+ - \frac{\sigma_x}{\omega\mu_i} e^{\imath\alpha_i z_i} A_{i,z}^+ - \frac{\alpha_i}{\omega\mu_i} e^{-\imath\alpha_i z_i} A_{i,x}^- - \frac{\sigma_x}{\omega\mu_i} e^{-\imath\alpha_i z_i} A_{i,z}^- \\
& - \frac{\alpha_{i+1}}{\omega\mu_{i+1}} e^{\imath\alpha_{i+1} z_i} A_{i+1,x}^+ + \frac{\sigma_x}{\omega\mu_{i+1}} e^{\imath\alpha_{i+1} z_i} A_{i+1,z}^+ + \frac{\alpha_{i+1}}{\omega\mu_{i+1}} e^{-\imath\alpha_{i+1} z_i} A_{i+1,x}^- + \frac{\sigma_x}{\omega\mu_{i+1}} e^{-\imath\alpha_{i+1} z_i} A_{i+1,z}^- = 0 \\
& \frac{\alpha_i}{\omega\mu_i} e^{\imath\alpha_i z_i} A_{i,y}^+ - \frac{\sigma_y}{\omega\mu_i} e^{\imath\alpha_i z_i} A_{i,z}^+ - \frac{\alpha_i}{\omega\mu_i} e^{-\imath\alpha_i z_i} A_{i,y}^- - \frac{\sigma_y}{\omega\mu_i} e^{-\imath\alpha_i z_i} A_{i,z}^- \\
& - \frac{\alpha_{i+1}}{\omega\mu_{i+1}} e^{\imath\alpha_{i+1} z_i} A_{i+1,y}^+ + \frac{\sigma_y}{\omega\mu_{i+1}} e^{\imath\alpha_{i+1} z_i} A_{i+1,z}^+ + \frac{\alpha_{i+1}}{\omega\mu_{i+1}} e^{-\imath\alpha_{i+1} z_i} A_{i+1,y}^- + \frac{\sigma_y}{\omega\mu_{i+1}} e^{-\imath\alpha_{i+1} z_i} A_{i+1,z}^- = 0
\end{aligned}$$

Pour la première et la dernière interface, les équations sont légèrement différentes.

2.2 Cas de la première interface (Source du champ idéal)

Le champ diffracté idéal est le champ dans la structure sans défaut éclairé par une onde plane incidente. Nous choisissons une onde incidente caractérisée par les angles i_0 normale et ψ polaire et d'amplitude \vec{A}_0 . Le champ électrique correspondant est donné par :

$$\hat{E}_1^+ = \vec{A}_1^+ (\vec{\sigma}_0) e^{\imath\alpha_1(\sigma_0)z} = \vec{A}_0 e^{\imath\alpha_1^0 z}$$

où : $\vec{\sigma}_0 = k_1 \sin i_0 (\cos \psi \vec{x} + \sin \psi \vec{y})$.

Dans le cas de la partie homogène du champ électrique diffusé (partie du champ uniquement due à la fluctuation), il n'y a pas d'onde incidente diffusée. Ce terme est donc nul : $\vec{A}_1^+(\vec{\sigma}) = \vec{0}$.

Ce champ est donc complètement connu. Nous pouvons alors passer son expression de l'autre coté de l'égalité dans les quatre équations précédentes. Nous écrivons alors :

$$\begin{aligned}
& -e^{-\imath\alpha_1^0 z_1} A_{1,x}^- + e^{\imath\alpha_2^0 z_1} A_{2,x}^+ + e^{-\imath\alpha_2^0 z_1} A_{2,x}^- = e^{\imath\alpha_1^0 z_1} A_{0,x} \\
& -e^{-\imath\alpha_1^0 z_1} A_{1,y}^- + e^{\imath\alpha_2^0 z_1} A_{2,y}^+ + e^{-\imath\alpha_2^0 z_1} A_{2,y}^- = e^{\imath\alpha_1^0 z_1} A_{0,y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\alpha_1^0}{\omega\mu_1}e^{-i\alpha_1^0 z_1}A_{1,x}^- - \frac{\sigma_{0,x}}{\omega\mu_1}e^{-i\alpha_1^0 z_1}A_{1,z}^- - \frac{\alpha_2^0}{\omega\mu_2}e^{i\alpha_2^0 z_1}A_{2,x}^+ + \frac{\sigma_{0,x}}{\omega\mu_2}e^{i\alpha_2^0 z_1}A_{2,z}^+ \\
& + \frac{\alpha_2^0}{\omega\mu_2}e^{-i\alpha_2^0 z_1}A_{2,x}^- + \frac{\sigma_{0,x}}{\omega\mu_2}e^{-i\alpha_2^0 z_1}A_{2,z}^- = -\frac{\alpha_1^0}{\omega\mu_1}e^{i\alpha_1^0 z_1}A_{0,x} + \frac{\sigma_{0,x}}{\omega\mu_1}e^{i\alpha_1^0 z_1}A_{0,z} \\
& -\frac{\alpha_1^0}{\omega\mu_1}e^{-i\alpha_1^0 z_1}A_{1,y}^- - \frac{\sigma_{0,y}}{\omega\mu_1}e^{-i\alpha_1^0 z_1}A_{1,z}^- - \frac{\alpha_2^0}{\omega\mu_2}e^{i\alpha_2^0 z_1}A_{2,y}^+ + \frac{\sigma_{0,y}}{\omega\mu_2}e^{i\alpha_2^0 z_1}A_{2,z}^+ \\
& + \frac{\alpha_2^0}{\omega\mu_2}e^{-i\alpha_2^0 z_1}A_{2,y}^- + \frac{\sigma_{0,y}}{\omega\mu_2}e^{-i\alpha_2^0 z_1}A_{2,z}^- = -\frac{\alpha_1^0}{\omega\mu_1}e^{i\alpha_1^0 z_1}A_{0,y} + \frac{\sigma_{0,y}}{\omega\mu_1}e^{i\alpha_1^0 z_1}A_{0,z}
\end{aligned}$$

Le second membre pour le cas idéal est donc identiquement nul sur tous ces termes sauf les quatre premiers qui sont donnés par le Bloc S_0 :

$$\boxed{
\begin{pmatrix}
e^{i\alpha_1^0 z_1} A_{0,x} \\
e^{i\alpha_1^0 z_1} A_{0,y} \\
-\frac{\alpha_1^0}{\omega\mu_1} e^{i\alpha_1^0 z_1} A_{0,x} + \frac{\sigma_{0,x}}{\omega\mu_1} e^{i\alpha_1^0 z_1} A_{0,z} \\
-\frac{\alpha_1^0}{\omega\mu_1} e^{i\alpha_1^0 z_1} A_{0,y} + \frac{\sigma_{0,y}}{\omega\mu_1} e^{i\alpha_1^0 z_1} A_{0,z}
\end{pmatrix}
} \quad (2.4)$$

$\vec{\sigma}$ et α sont des fonctions des deux angles normal et polaire. Dans le cas idéal, l'angle normal vaut i_0 et l'angle polaire ψ , les fonctions sont alors notées α^0 et $\vec{\sigma}_0$. Dans le cas diffusé, l'angle normal vaut θ et l'angle polaire ϕ . Ainsi, la matrice \bar{W} sera légèrement différente dans le cas du champ diffracté idéal et dans le cas du champ diffusé en raison des angles d'observations qui sont différents.

2.3 Cas de la dernière interface

Le dernier milieu $i = n+1$ est également particulier car il n'y a pas d'onde rétrograde ($\vec{A}_{n+1}^- = \vec{0}$). Les équations deviennent :

$$\begin{aligned}
& -e^{i\alpha_n z_n} A_{n,x}^+ - e^{-i\alpha_n z_n} A_{n,x}^- + e^{i\alpha_{n+1} z_n} A_{n+1,x}^+ = 0 \\
& -e^{i\alpha_n z_n} A_{n,y}^+ - e^{-i\alpha_n z_n} A_{n,y}^- + e^{i\alpha_{n+1} z_n} A_{n+1,y}^+ = 0 \\
& \frac{\alpha_n}{\omega\mu_n} e^{i\alpha_n z_n} A_{n,x}^+ - \frac{\sigma_x}{\omega\mu_n} e^{i\alpha_n z_n} A_{n,z}^+ - \frac{\alpha_n}{\omega\mu_n} e^{-i\alpha_n z_n} A_{n,x}^- - \frac{\sigma_x}{\omega\mu_n} e^{-i\alpha_n z_n} A_{n,z}^- \\
& - \frac{\alpha_{n+1}}{\omega\mu_{n+1}} e^{i\alpha_{n+1} z_n} A_{n+1,x}^+ + \frac{\sigma_x}{\omega\mu_{n+1}} e^{i\alpha_{n+1} z_n} A_{n+1,z}^+ = 0 \\
& \frac{\alpha_n}{\omega\mu_n} e^{i\alpha_n z_n} A_{n,y}^+ - \frac{\sigma_y}{\omega\mu_n} e^{i\alpha_n z_n} A_{n,z}^+ - \frac{\alpha_n}{\omega\mu_n} e^{-i\alpha_n z_n} A_{n,y}^- - \frac{\sigma_y}{\omega\mu_n} e^{-i\alpha_n z_n} A_{n,z}^- \\
& - \frac{\alpha_{n+1}}{\omega\mu_{n+1}} e^{i\alpha_{n+1} z_n} A_{n+1,y}^+ + \frac{\sigma_y}{\omega\mu_{n+1}} e^{i\alpha_{n+1} z_n} A_{n+1,z}^+ = 0
\end{aligned}$$

2.4 Matrice $\bar{\bar{W}}$

Nous pouvons maintenant écrire ces équations sous forme d'une matrice $\bar{\bar{W}}$. Pour résoudre le système et déterminer les constantes, il suffit alors d'inverser la matrice et de la multiplier par le second membre qui est une matrice $(6n, 1)$. Cette matrice source dépend du champ calculé et sera donnée différemment selon les cas (idéal ou diffusé).

La matrice $\bar{\bar{W}}$ à inverser se compose de quatre types de blocs :

- Bloc 1(i) :

$$\left(\begin{array}{ccc} e^{\imath\alpha_{i+1}z_i} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\imath\alpha_{i+1}z_i} & 0 \\ -\frac{\alpha_{i+1}}{\omega\mu_{i+1}}e^{\imath\alpha_{i+1}z_i} & 0 & \frac{\sigma_x}{\omega\mu_{i+1}}e^{\imath\alpha_{i+1}z_i} \\ 0 & -\frac{\alpha_{i+1}}{\omega\mu_{i+1}}e^{\imath\alpha_{i+1}z_i} & \frac{\sigma_y}{\omega\mu_{i+1}}e^{\imath\alpha_{i+1}z_i} \end{array} \right) \quad (2.5)$$

- Bloc 2(i) :

$$\left(\begin{array}{ccc} e^{-\imath\alpha_{i+1}z_i} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\imath\alpha_{i+1}z_i} & 0 \\ \frac{\alpha_{i+1}}{\omega\mu_{i+1}}e^{-\imath\alpha_{i+1}z_i} & 0 & \frac{\sigma_x}{\omega\mu_{i+1}}e^{-\imath\alpha_{i+1}z_i} \\ 0 & \frac{\alpha_{i+1}}{\omega\mu_{i+1}}e^{-\imath\alpha_{i+1}z_i} & \frac{\sigma_y}{\omega\mu_{i+1}}e^{-\imath\alpha_{i+1}z_i} \end{array} \right) \quad (2.6)$$

- Bloc 3(i) :

$$\left(\begin{array}{ccc} -e^{\imath\alpha_i z_i} & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\imath\alpha_i z_i} & 0 \\ \frac{\alpha_i}{\omega\mu_i}e^{\imath\alpha_i z_i} & 0 & -\frac{\sigma_x}{\omega\mu_i}e^{\imath\alpha_i z_i} \\ 0 & \frac{\alpha_i}{\omega\mu_i}e^{\imath\alpha_i z_i} & -\frac{\sigma_y}{\omega\mu_i}e^{\imath\alpha_i z_i} \end{array} \right) \quad (2.7)$$

- Bloc 4(i) :

$$\left(\begin{array}{ccc} -e^{-\imath\alpha_i z_i} & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\imath\alpha_i z_i} & 0 \\ -\frac{\alpha_i}{\omega\mu_i}e^{-\imath\alpha_i z_i} & 0 & -\frac{\sigma_x}{\omega\mu_i}e^{-\imath\alpha_i z_i} \\ 0 & -\frac{\alpha_i}{\omega\mu_i}e^{-\imath\alpha_i z_i} & -\frac{\sigma_y}{\omega\mu_i}e^{-\imath\alpha_i z_i} \end{array} \right) \quad (2.8)$$

Les quatre blocs ne représentent que $4n$ équations. Alors qu'il y a $6n$ inconnues. Nous devons donc ajouter $2n$ équations. La nullité de la divergence du champ électrique homogène nous permet d'écrire :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{A}^+ (\vec{\sigma}) e^{\imath\alpha(\sigma)z} + \vec{A}^- (\vec{\sigma}) e^{-\imath\alpha(\sigma)z} \right) = 0$$

De façon symbolique nous avons ainsi :

$$f^+(\vec{\sigma})e^{\imath\alpha(\sigma)z} + f^-(\vec{\sigma})e^{-\imath\alpha(\sigma)z} = 0$$

Pour satisfaire cette égalité, il faut que $f^+(\vec{\sigma}) = \mathcal{C}e^{-\imath\alpha(\sigma)z}$ et $f^-(\vec{\sigma}) = \mathcal{C}e^{\imath\alpha(\sigma)z} \forall \mathcal{C}$. La valeur la plus simple que peut prendre \mathcal{C} est zéro. Nous avons ainsi :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}^+ = 0 \quad (2.9a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}^- = 0 \quad (2.9b)$$

Ce qui nous permet d'obtenir les équations supplémentaires nécessaires à la résolution du système.

$$\sigma_x A_{i,x}^+ + \sigma_y A_{i,y}^+ + \alpha_i A_{i,z}^+ = 0 \quad (2.10a)$$

$$\sigma_x A_{i,x}^- + \sigma_y A_{i,y}^- - \alpha_i A_{i,z}^- = 0 \quad (2.10b)$$

Nous avons alors les deux types de blocs suivant :

– Bloc $+(i)$:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \alpha_i \end{pmatrix}} \quad (2.11)$$

– Bloc $-(i)$:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_y & -\alpha_i \end{pmatrix}} \quad (2.12)$$

La matrice $\bar{\bar{W}}$ est constituée de la manière suivante (les numéros et signes indiquent les blocs utilisés) :

$$\bar{\bar{W}} = \left(\begin{array}{cccccccc} 4 & 1 & 2 & & & & & \\ & 3 & 4 & 1 & 2 & & & \\ & & & 3 & 4 & 1 & 2 & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 3 & 4 & 1 \\ \hline - & & & & & & & & & \\ & + & & & & & & & & \\ & & - & & & & & & & \\ & & & + & & & & & & \\ & & & & - & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & + & & \end{array} \right) \begin{array}{l} i=1 \\ i=2 \\ i=3 \\ \vdots \\ i=n \\ \hline i=1 \\ i=2 \\ i=2 \\ i=3 \\ i=3 \\ \vdots \\ i=n+1 \end{array} \quad (2.13)$$

Les valeurs de chaque composante de l'amplitude dans chaque milieu sont données

dans l'ordre suivant :

$$\bar{\bar{A}} = \begin{pmatrix} A_{1,x}^- \\ A_{1,y}^- \\ A_{1,z}^- \\ A_{2,x}^+ \\ A_{2,y}^+ \\ A_{2,z}^+ \\ A_{2,x}^- \\ A_{2,y}^- \\ A_{2,z}^- \\ \vdots \\ A_{n+1,x}^+ \\ A_{n+1,y}^+ \\ A_{n+1,z}^+ \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

2.5 Système à résoudre pour le champ idéal

Le système à résoudre pour obtenir le champ idéal est donc :

$$\bar{\bar{W}} \bar{\bar{A}}^0 = \begin{pmatrix} S_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

2.6 Source de la solution homogène du champ diffusé

D'après la forme des solutions présentées au chapitre précédent, les conditions de raccordement aux interfaces se réécrivent :

$$\vec{z} \times \delta \vec{E}_i^{d'}(x, y, z_i) = -\vec{z} \times \delta \vec{E}_i^{d*}(x, y, z_i)$$

$$\vec{z} \times \delta \vec{H}_i^{d'}(x, y, z_i) = -\vec{z} \times \delta \vec{H}_i^{d*}(x, y, z_i)$$

Les membres de droite sont des termes sources complètement définis. Les termes de gauche sont identiques au cas du champ idéal montré précédemment à la différence près des angles normale θ et polaire ϕ . La matrice $\bar{\bar{W}}$ est la même matrice que pour la solution

idéale. Le système à résoudre est aussi identique à la différence près de la source qui est constituée de Bloc $S_v(i)$:

$$\begin{pmatrix} -\delta E_{i,x}^{d*}(x, y, z_i) \\ -\delta E_{i,y}^{d*}(x, y, z_i) \\ \delta H_{i,y}^{d*}(x, y, z_i) \\ -\delta H_{i,x}^{d*}(x, y, z_i) \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Le système à résoudre pour obtenir le champ homogène du diffusé est donc :

$$\bar{W} \bar{A}_v^d = \begin{pmatrix} S_v(1) \\ S_v(2) \\ S_v(3) \\ \vdots \\ S_v(n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

2.7 Validation de la méthode EMFORS par comparaison avec un résultat de référence

Afin de mettre au point notre outil de calcul, nous avons cherché à reproduire les résultats présentés dans [34] pour des fluctuations diélectriques. En effet, comme nous l'avons indiqué il n'existe à notre connaissance aucun résultat pour des fluctuations diélectrique et magnétique. Cependant, la validité de notre outil dans le cas des non-magnétiques est déjà une condition nécessaire dont il convenait de s'assurer.

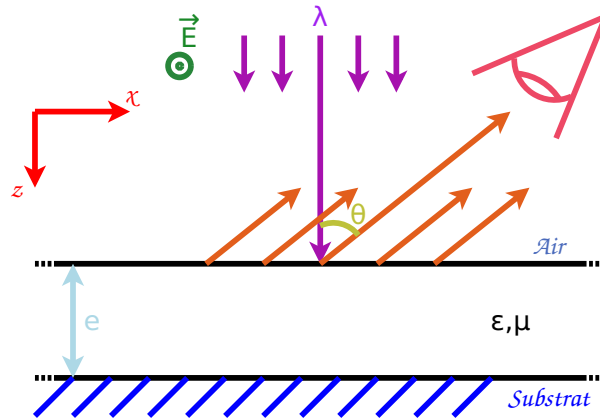


Figure 2.1 – Représentation de la couche étudiée sur un substrat.

Nous considérons une couche de diélectrique déposée sur un verre semi-infini d'indice de refraction $n = 1.539$. Le spectre de permittivité (fonction d'autocorrélation) γ_ε est donné par la transformée de Fourier de la somme d'une Gaussienne et d'une exponentielle (2.18).

$$\gamma_\varepsilon(\sigma) = \frac{1}{4\pi} (\delta_g L_g)^2 \exp \left[- \left(\frac{\sigma L_g}{2} \right)^2 \right] + \frac{1}{2\pi} (\delta_e L_e)^2 [1 + (\sigma L_e)^2]^{-\frac{3}{2}}. \quad (2.18)$$

Les paramètres δ_e , L_e , δ_g et L_g sont les suivants :

$$\begin{aligned} \delta_e &= 0.0171, \quad L_e = 2000 \text{ nm}, \\ \delta_g &= 0.00856, \quad L_g = 200 \text{ nm}. \end{aligned}$$

L'intensité diffusée (cf. Annexe D) par l'inhomogénéité volumique est calculée pour deux types de couche : un haut-indice (ZnS, $n_H = 2.3$) et un bas-indice (cryolite, Na_3AlF_6 , $n_L = 1.3$). Les cas de la cryolite 2L (soit une épaisseur $e = 2\lambda/4n_L$) et du ZnS 2H ($e = 2\lambda/4n_H$) sont donnés en figures 2.2a et 2.2b pour un éclairage normal ($i_0 = \psi = 0$) à la longueur d'onde $\lambda = 633 \text{ nm}$ en polarisation SS (\vec{E} incident et diffusé sont perpendiculaires au plan d'incidence xOz). La polarisation PP (\vec{H} incident et diffusé sont perpendiculaires au plan d'incidence xOz) est donnée dans le cas de la solution matricielle EMFORS à titre d'illustration, la référence [34] ne donnant que la polarisation SS.

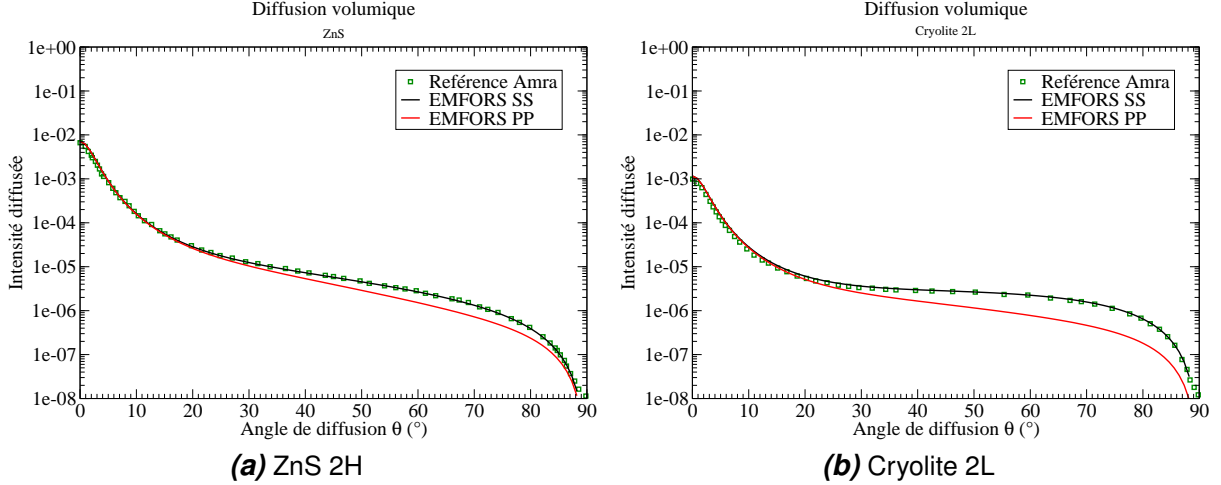


Figure 2.2 – Diffusion volumique en réflexion d'une couche sur du verre. Comparaison de la méthode EMFORS avec les résultats de Amra [34].

Nous observons un très bon accord entre [34] et EMFORS. La méthode utilisée dans [34] est également une approximation du premier ordre mais la résolution utilisée est celle des admittances. La validation ne sera donc complète qu'avec une confrontation entre notre méthode matricielle et un calcul dit exact comme un code d'éléments finis (COMSOL®). Ce calcul nous permet en outre de tester notre outil avec une perméabilité différente de l'unité.

2.8 Validation d'EMFORS par un calcul d'éléments finis

Nous prenons pour cette validation l'exemple d'une couche de permittivité $\varepsilon_r = 3$ et de perméabilité $\mu_r = 2$ dans l'air. Nous prenons donc en compte une fluctuation de perméabilité pour montrer l'apport de notre méthode et son efficacité. La couche fait $e = 0.01$ m d'épaisseur et possède une fluctuation de permittivité ou de perméabilité sur une longueur $L = 10$ m selon une fonction $p_{alea}(x)$ tiré aléatoirement (on tire selon une loi les valeurs $-1,0,1$, puis on multiplie par un pourcentage pour que la fluctuation reste dans l'approximation du premier ordre).

L'objet considéré peut être représenté comme sur la figure 2.1, à la différence près que sa taille est finie dans le calcul COMSOL[®] et qu'il n'y a pas de substrat. La permittivité et la perméabilité de la couche s'expriment par :

$$\varepsilon'_r = \varepsilon_r(1 + 0.2p_{alea}(x))$$

$$\mu'_r = \mu_r(1 + 0.2p_{alea}(x))$$

où la fonction $p_{alea}(x)$ est celle représenté sur la figure 2.1. Elle est nulle en dehors du domaine $[-5, 5]$.

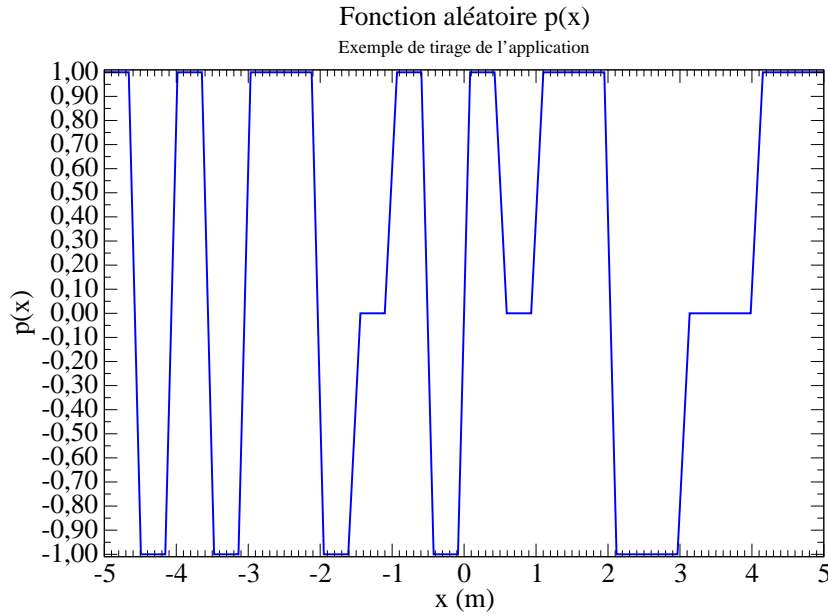


Figure 2.3 – Représentation de $p_{alea}(x)$.

La couche est éclairé par une onde plane incidente en polarisation S ($E_y \neq 0$) à la longueur d'onde $\lambda = 1$ m.

Nous traçons sur la figure 2.4 l'intensité diffusée (cf. Annexe D) pour trois types de fluctuations : permittivité, perméabilité et les deux en même temps.

Nous observons un très bon accord pour les trois fluctuations proposés. Des phénomènes intéressants apparaissent sur ce graphique, ils font l'objet de l'étude faite en Section 5.1.

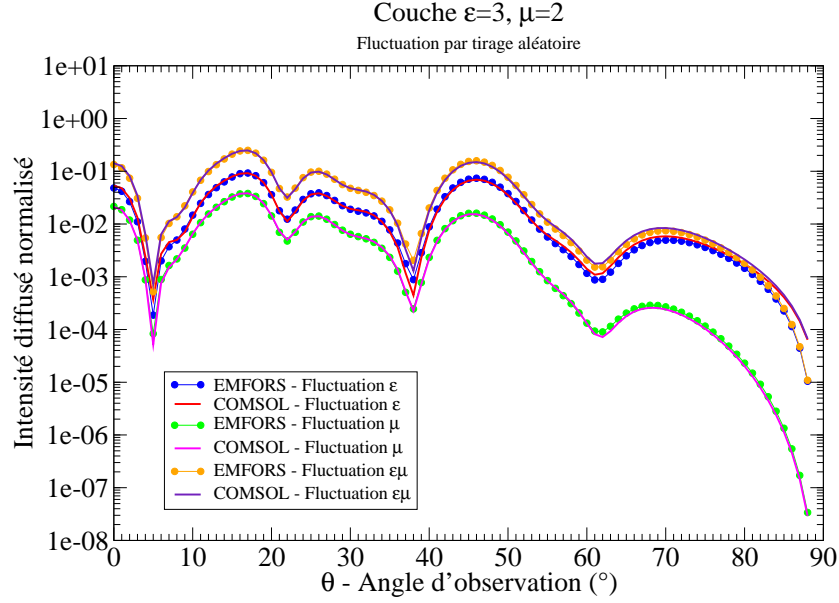


Figure 2.4 – Intensité diffusée par une fluctuation de permittivité et/ou de perméabilité en polarisation S - $\mu_r = 2$ et $\varepsilon_r = 3$.

2.9 Limite de validité

Bien que les cas présentés jusqu'ici donnent de très bon résultats, nous avons constaté de forte divergence pour des structures possédant un indice plus élevé. Nous présentons ainsi sur la figure 2.5, le cas d'une couche de permittivité $\varepsilon_r = 10$ dont seule la permittivité fluctue avec la fonction $0.2p(x)$ précédente (figure 2.3). L'intensité diffusée normalisée est tracée pour le cas d'une couche d'épaisseur $e = 0.01\lambda$ et un d'épaisseur $e = 0.03\lambda$.

Nous observons, dans le cas de la couche de $e = 0.01\lambda$, un écart plus important que dans les cas précédents entre le calcul au premier ordre et la solution exacte. Néanmoins, la forme et le niveau restent globalement acceptables. Dans le cas de $e = 0.03$, la forme n'est plus du tout respectée et le niveau bien qu'assez bon pour les angles proches de la normale, devient inexact pour les angles rasants. Ce phénomène est principalement dû à la taille finie du cas de comparaison. En effet, EMFORS suppose un matériau infini, or dans la modélisation COMSOL® l'objet est soit fini soit périodique, (mais dans ce dernier cas le défaut est également périodisé). La différence entre le champ à l'intérieur de l'objet fini et celui à l'intérieur de l'objet infini sera d'autant plus grande que l'objet est épais et possède un fort indice. En effet, nous avons observé que la couche de $e = 0.01\lambda$ donne un meilleur accord que celui de $e = 0.03\lambda$ pour un même indice. Et les cas d'indice plus faible précédemment étudiés montrent une erreur moins importante que ceux présentés ici.

L'étude que nous mènerons au Chapitre 7 confirmera ces observations.

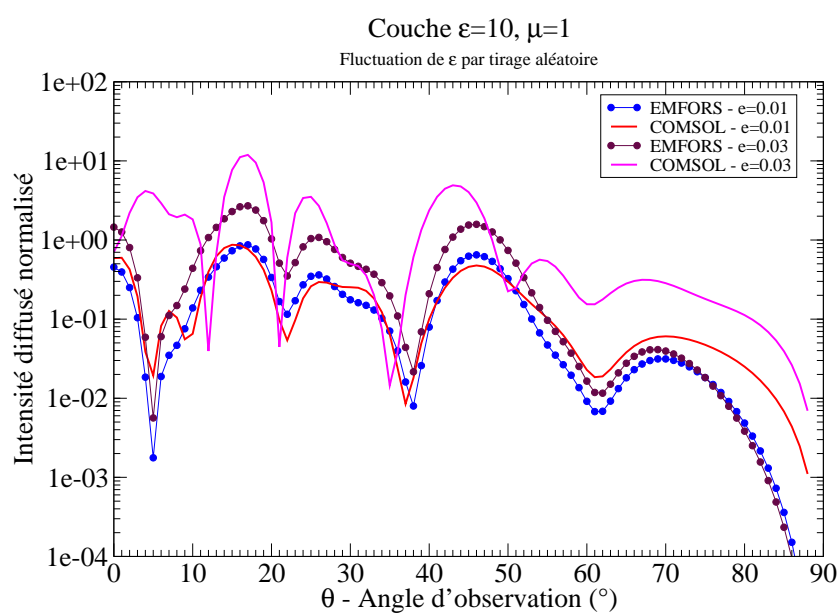


Figure 2.5 – Intensité diffusée pour une fluctuation de permittivité et en polarisation S - $\mu_r = 1$ et $\varepsilon_r = 10$.

Chapitre 3

Méthode ABE

La méthode ABE est une résolution analytique des équations du vecteur d'onde (1.25a) et (1.25b) en utilisant les admittances. Cette méthode a été développée par Bousquet [29], Elson [30] et Amra [31] (d'où son nom) conjointement à une approximation du premier ordre. Néanmoins, la notion d'admittance est bien plus ancienne on peut citer par exemple Blaisse [37] qui l'utilisait déjà pour obtenir le coefficient de réflexion d'un empilement de couches dont certaines pouvaient être inhomogènes. Cependant, toutes ces méthodes font l'hypothèse de matériaux non-magnétiques. C'est pourquoi, nous l'avons étendu aux fluctuations de perméabilité.

La méthode ABE nécessite la définition de l'indice effectif, de la matrice de transition et de l'admittance. Une *seule* couche inhomogène est considérée à la fois (la somme des contributions de chaque couche inhomogène est fait à la fin). Nous noterons par l'indice j cette couche inhomogène. Ainsi, seule la couche j possédera une solution particulière. Toutes les autres couches $i \neq j$ seront des couches homogènes, dont les solutions seront les champs homogènes \vec{X}' .

Les champs de la couche inhomogène j prendront la forme (3.1).

$$\vec{X}_j = \vec{X}'_j + \vec{X}_j^* \quad (3.1)$$

L'avantage de cette méthode est l'obtention de formules analytiques.

3.1 Indice effectif

L'indice effectif permet de relier les composantes tangentielles des champs homogènes ($\vec{z} \times \vec{X}'$). D'après (2.1) et (2.2), nous écrivons :

$$\hat{H}_i'^+ = \frac{1}{\omega\mu_i} \vec{k}_i^+ \times \hat{E}_i'^+ \quad (3.2a)$$

$$\hat{H}_i'^- = \frac{1}{\omega\mu_i} \vec{k}_i^- \times \hat{E}_i'^- \quad (3.2b)$$

$$\hat{E}_i'^+ = -\frac{1}{\omega\varepsilon_i} \vec{k}_i^+ \times \hat{H}_i'^+ \quad (3.3a)$$

$$\hat{E}_i'^- = -\frac{1}{\omega\varepsilon_i} \vec{k}_i^- \times \hat{H}_i'^- \quad (3.3b)$$

avec \vec{k}_i^+ et \vec{k}_i^- donnés par :

$$\vec{k}_i^\pm = \vec{\sigma} \pm \alpha_i \vec{z} \quad (3.4)$$

et $\hat{X}_i^{\prime\pm} = \vec{A}_i^{X\pm} e^{\pm i\alpha_i z}$ est la partie progressive ou rétrograde du champ \vec{X} (électrique \vec{E} ou magnétique \vec{H}).

La polarisation S (ou TE ou H_\parallel) correspond à un champ électrique perpendiculaire au plan d'incidence. Ainsi :

$$\vec{z} \cdot \hat{\vec{E}}'_i = 0$$

Nous pouvons alors exprimer pour l'onde progressive :

$$\vec{z} \times \hat{\vec{H}}_i^{\prime+} = \frac{\alpha_i}{\omega\mu_i} \vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{\vec{E}}_i^{\prime+} \right)$$

La polarisation P (ou TM ou E_\parallel) correspond à un champ magnétique perpendiculaire au plan d'incidence. Ainsi :

$$\vec{z} \cdot \hat{\vec{H}}'_i = 0$$

Nous pouvons alors exprimer, à nouveau pour l'onde progressive :

$$\vec{z} \times \hat{\vec{E}}_i^{\prime+} = -\frac{\alpha_i}{\omega\varepsilon_i} \vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{\vec{H}}_i^{\prime+} \right)$$

Par conséquent :

$$\vec{z} \times \hat{\vec{H}}_i^{\prime+} = \frac{\omega\varepsilon_i}{\alpha_i} \vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{\vec{E}}_i^{\prime+} \right)$$

Donc, si nous introduisons \tilde{n}_i l'indice effectif de la couche i :

$$\tilde{n}_i = \begin{cases} \frac{\alpha_i}{\omega\mu_i} & \text{en polarisation S} \\ \frac{\omega\varepsilon_i}{\alpha_i} & \text{en polarisation P} \end{cases} \quad (3.6)$$

nous avons pour l'onde progressive dans les deux polarisations :

$$\vec{z} \times \hat{\vec{H}}_i^{\prime+} = \tilde{n}_i \vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{\vec{E}}_i^{\prime+} \right)$$

Nous obtenons une relation analogue pour l'onde rétrograde :

$$\vec{z} \times \hat{\vec{H}}_i^{\prime-} = -\tilde{n}_i \vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{\vec{E}}_i^{\prime-} \right)$$

Finalement, la composante tangentielle du champ magnétique peut être relié à la composante tangentielle du champ électrique via l'indice effectif (3.8).

$$\vec{z} \times \hat{\vec{H}}'_i = \tilde{n}_i \vec{z} \times \left[\vec{z} \times \left(\hat{\vec{E}}_i^{\prime+} - \hat{\vec{E}}_i^{\prime-} \right) \right] \quad (3.8)$$

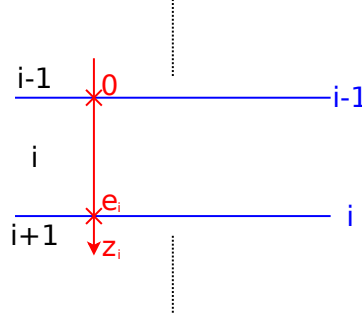


Figure 3.1 – Repère local de la couche i . Le milieu i est encadré par les interfaces $i - 1$ au dessus et i en dessous. Il est caractérisé par sa perméabilité μ_i , sa permittivité ε_i et son épaisseur e_i .

3.2 Matrice de transition

Nous nous plaçons à l'intérieur d'une couche i et nous considérons un repère local dans la couche (cf. Figure 3.1), dont le zéro est à l'interface supérieure et va jusqu'à e_i à l'interface inférieure.

La solution (1.32), nous permet alors d'écrire :

$$\hat{E}'_i(\vec{\sigma}, 0) = \hat{E}'^{+}_i(\vec{\sigma}, 0) + \hat{E}'^{-}_i(\vec{\sigma}, 0) = \hat{E}'^{+}_i(\vec{\sigma}, e_i)e^{-\imath\alpha_i e_i} + \hat{E}'^{-}_i(\vec{\sigma}, e_i)e^{\imath\alpha_i e_i} \quad (3.9a)$$

$$\hat{H}'_i(\vec{\sigma}, 0) = \hat{H}'^{+}_i(\vec{\sigma}, 0) + \hat{H}'^{-}_i(\vec{\sigma}, 0) = \hat{H}'^{+}_i(\vec{\sigma}, e_i)e^{-\imath\alpha_i e_i} + \hat{H}'^{-}_i(\vec{\sigma}, e_i)e^{\imath\alpha_i e_i} \quad (3.9b)$$

En utilisant les relations (3.8) et (3.9), nous obtenons :

$$\vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{E}'_i(\vec{\sigma}, 0) \right) = \vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{E}'_i(\vec{\sigma}, e_i) \right) \cos(\alpha_i e_i) - \vec{z} \times \hat{H}'_i(\vec{\sigma}, e_i) \frac{\imath \sin(\alpha_i e_i)}{\tilde{n}_i} \quad (3.10a)$$

$$\vec{z} \times \hat{H}'_i(\vec{\sigma}, 0) = -\vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{E}'_i(\vec{\sigma}, e_i) \right) \tilde{m}_i \sin(\alpha_i e_i) + \vec{z} \times \hat{H}'_i(\vec{\sigma}, e_i) \cos(\alpha_i e_i) \quad (3.10b)$$

Nous pouvons les mettre sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{E}'_i(\vec{\sigma}, 0) \right) \\ \vec{z} \times \hat{H}'_i(\vec{\sigma}, 0) \end{pmatrix} = M_i \begin{pmatrix} \vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{E}'_i(\vec{\sigma}, e_i) \right) \\ \vec{z} \times \hat{H}'_i(\vec{\sigma}, e_i) \end{pmatrix} \quad (3.11a)$$

Où nous définissons M_i , la matrice de transition de la couche (i).

$$M_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & a_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_i e_i) & -\frac{\imath \sin(\alpha_i e_i)}{\tilde{n}_i} \\ -\tilde{m}_i \sin(\alpha_i e_i) & \cos(\alpha_i e_i) \end{pmatrix} \quad (3.11b)$$

3.3 Admittances

“L’admittance est définie par le quotient de deux quantités de telle façon qu’elle varie continûment avec l’épaisseur de la couche, même si l’indice varie de manière discontinue” [37]. La définition est donnée [31] par :

$$\vec{z} \times \hat{\vec{H}}' = Y \vec{z} \times (\vec{z} \times \hat{\vec{E}}') \quad (3.12)$$

Pour calculer le champ diffusé réfléchi et en transmis, nous avons besoin de savoir relier les champs entre les interfaces depuis l’air et depuis le substrat. Nous définissons ainsi les admittances comme représentées sur la figure 3.2.

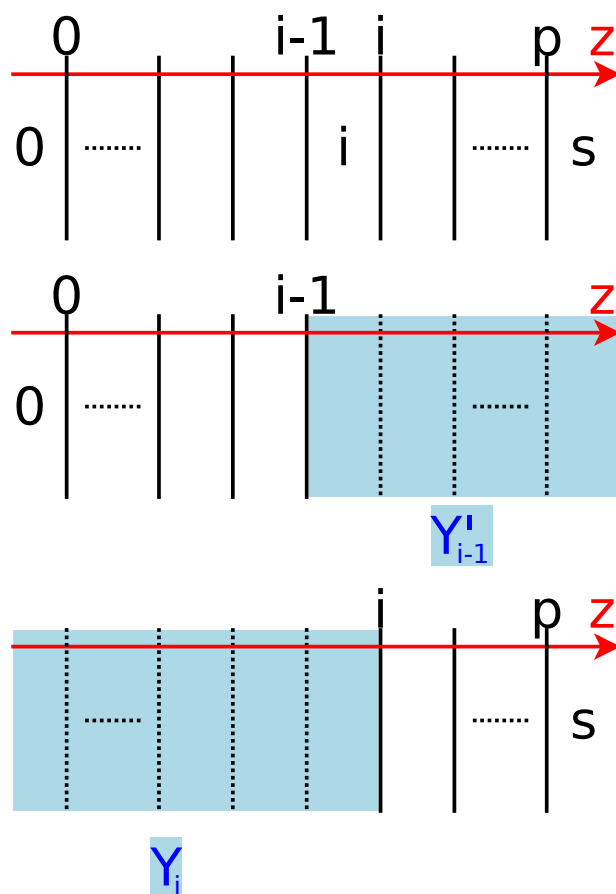


Figure 3.2 – Admittances du multicouche. L’admittance Y'_{i-1} est l’admittance en dessous de l’interface $i - 1$. L’admittance Y_i est l’admittance au dessous de l’interface i . Elles sont toutes les deux exprimées à l’aide du champ dans le milieu i aux interfaces correspondantes $z = 0$ pour l’interface $i - 1$ et $z = e_i$ pour l’interface i .

Nous connaissons l’expression de $\vec{z} \times \hat{\vec{H}}'$ et $\vec{z} \times (\vec{z} \times \hat{\vec{E}}')$ aux interfaces $i - 1$ (en 0) et i (en e_i) pour la couche i . Nous pouvons alors écrire grâce aux relations (3.10) et (3.12) :

$$Y'_{i-1} = \frac{-i\tilde{n}_i \sin(\alpha_i e_i) + Y'_i \cos(\alpha_i e_i)}{\cos(\alpha_i e_i) - Y'_i \frac{\sin(\alpha_i e_i)}{\tilde{n}_i}} \quad (3.13)$$

La relation (3.13) est l'admittance Y'_{i-1} de l'ensemble des milieux sous l'interface $i-1$, elle est donnée par le rapport entre $\vec{z} \times \hat{\vec{H}}'_i(\vec{\sigma}, 0)$ et $\vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{\vec{E}}'_i(\vec{\sigma}, 0) \right)$.

$$\vec{z} \times \hat{\vec{H}}'_i(\vec{\sigma}, 0) = Y'_{i-1} \vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{\vec{E}}'_i(\vec{\sigma}, 0) \right) \quad (3.14a)$$

Elle s'exprime à l'aide de l'admittance Y'_i de l'ensemble des milieux sous l'interface i , qui est donnée par le rapport entre $\vec{z} \times \hat{\vec{H}}'_i(\vec{\sigma}, e_i)$ et $\vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{\vec{E}}'_i(\vec{\sigma}, e_i) \right)$.

$$\vec{z} \times \hat{\vec{H}}'_i(\vec{\sigma}, e_i) = Y'_i \vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{\vec{E}}'_i(\vec{\sigma}, e_i) \right) \quad (3.14b)$$

Grâce à la relation de continuité des champs homogènes (1.18), nous pouvons aussi écrire :

$$\vec{z} \times \hat{\vec{H}}'_{i+1}(\vec{\sigma}, 0) = Y'_i \vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{\vec{E}}'_{i+1}(\vec{\sigma}, 0) \right) \quad (3.14c)$$

Par récurrence, l'admittance de chaque ensemble sous les interfaces est calculée à partir de celle de la dernière et correspond à l'indice effectif du dernier milieu : $Y'_{s-1} = \tilde{n}_s$.

Remarque La numérotation des admittances depuis le substrat Y' est particulière, elles sont référencées avec le numéro de l'interface. Ainsi, l'admittance du substrat (le dernier milieu s) est numérotée $s-1$, il s'agit en effet de l'interface $s-1$.

De manière analogue, nous pouvons aussi définir une admittance dans l'autre sens en prenant cette fois la matrice de transition inverse :

$$M_i^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_i e_i) & \frac{i \sin(\alpha_i e_i)}{\tilde{n}_i} \\ i \tilde{n}_i \sin(\alpha_i e_i) & \cos(\alpha_i e_i) \end{pmatrix} \quad (3.15a)$$

Et ainsi, la relation :

$$\begin{pmatrix} \vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{\vec{E}}'_i(\vec{\sigma}, e_i) \right) \\ \vec{z} \times \hat{\vec{H}}'_i(\vec{\sigma}, e_i) \end{pmatrix} = M_i^{-1} \begin{pmatrix} \vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{\vec{E}}'_i(\vec{\sigma}, 0) \right) \\ \vec{z} \times \hat{\vec{H}}'_i(\vec{\sigma}, 0) \end{pmatrix} \quad (3.15b)$$

Nous pouvons alors écrire :

$$\vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{\vec{E}}'_i(\vec{\sigma}, e_i) \right) = \vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{\vec{E}}'_i(\vec{\sigma}, 0) \right) \cos(\alpha_i e_i) + \vec{z} \times \hat{\vec{H}}'_i(\vec{\sigma}, 0) \frac{i \sin(\alpha_i e_i)}{\tilde{n}_i} \quad (3.16a)$$

$$\vec{z} \times \hat{\vec{H}}'_i(\vec{\sigma}, e_i) = \vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{\vec{E}}'_i(\vec{\sigma}, 0) \right) i \tilde{n}_i \sin(\alpha_i e_i) + \vec{z} \times \hat{\vec{H}}'_i(\vec{\sigma}, 0) \cos(\alpha_i e_i) \quad (3.16b)$$

Nous prenons le rapport de ces expressions, nous avons donc :

$$Y_i = \frac{i \tilde{n}_i \sin(\alpha_i e_i) + Y_{i-1} \cos(\alpha_i e_i)}{\cos(\alpha_i e_i) + Y_{i-1} \frac{i \sin(\alpha_i e_i)}{\tilde{n}_i}} \quad (3.17)$$

La relation (3.17) est l'admittance Y_i de l'ensemble des milieux au dessus de l'interface i , elle est donnée par le rapport entre $\vec{z} \times \hat{\vec{H}}'_i(\vec{\sigma}, e_i)$ et $\vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{\vec{E}}'_i(\vec{\sigma}, e_i) \right)$.

$$\vec{z} \times \hat{\vec{H}}'_i(\vec{\sigma}, e_i) = Y_i \vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{\vec{E}}'_i(\vec{\sigma}, e_i) \right) \quad (3.18a)$$

Elle s'exprime à l'aide de l'admittance Y_{i-1} de l'ensemble des milieux au dessus de l'interface $i - 1$, qui est donnée par le rapport entre $\vec{z} \times \hat{H}'_i(\vec{\sigma}, 0)$ et $\vec{z} \times (\vec{z} \times \hat{E}'_i(\vec{\sigma}, 0))$.

$$\vec{z} \times \hat{H}'_i(\vec{\sigma}, 0) = Y_{i-1} \vec{z} \times (\vec{z} \times \hat{E}'_i(\vec{\sigma}, 0)) \quad (3.18b)$$

Grâce aux relations de continuité des champs homogènes (1.18), nous pouvons aussi écrire :

$$\vec{z} \times \hat{H}'_{i-1}(\vec{\sigma}, e_{i-1}) = Y_{i-1} \vec{z} \times (\vec{z} \times \hat{E}'_{i-1}(\vec{\sigma}, e_{i-1})) \quad (3.18c)$$

Par récurrence, l'admittance de chaque ensemble au dessus des interfaces est calculée à partir de celle de la première et correspond à l'indice effectif du premier milieu : $Y_0 = -\tilde{n}_0$.

Remarque La numérotation de l'admittance depuis le superstrat (l'air, le milieu 0) Y est la même que pour l'admittance depuis le substrat. Cependant, elle est plus simple car l'indice de l'admittance coïncide avec l'indice de la couche.

3.4 Détermination du champ à l'interface de la couche inhomogène j

L'indice effectif, la matrice de transition et l'admittance sont valables uniquement pour les champs homogènes \hat{X}' . Dans la couche inhomogène j , les équations présentent des sources électriques et magnétiques équivalentes à l'inhomogénéité. D'après (3.1) et les relations de continuité des champs (1.18), nous pouvons écrire :

$$\vec{z} \times \hat{X}'_j(\vec{\sigma}, 0) - \vec{z} \times \hat{X}'_{j-1}(\vec{\sigma}, e_{j-1}) = -\vec{z} \times \hat{X}^*_j(\vec{\sigma}, 0) \quad (3.19a)$$

$$\vec{z} \times \hat{X}'_j(\vec{\sigma}, e_j) - \vec{z} \times \hat{X}'_{j+1}(\vec{\sigma}, 0) = -\vec{z} \times \hat{X}^*_j(\vec{\sigma}, e_j) \quad (3.19b)$$

En utilisant la matrice de transition (3.11) pour la partie homogène du champ dans le milieu j inhomogène et les relations précédentes (3.19), nous pouvons écrire :

$$\begin{pmatrix} \vec{z} \times (\vec{z} \times \hat{E}'_j(\vec{\sigma}, 0)) \\ \vec{z} \times \hat{H}'_j(\vec{\sigma}, 0) \end{pmatrix} = M_j \begin{pmatrix} \vec{z} \times (\vec{z} \times \hat{E}'_{j+1}(\vec{\sigma}, 0)) - \vec{z} \times (\vec{z} \times \hat{E}^*_j(\vec{\sigma}, e_j)) \\ \vec{z} \times \hat{H}'_{j+1}(\vec{\sigma}, 0) - \vec{z} \times \hat{H}^*_j(\vec{\sigma}, e_j) \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Pour simplifier les calculs nous noterons :

$$\vec{z} \times \hat{X}(\vec{\sigma}, z) = \hat{X}^t(z)$$

Nous avons alors :

$$\vec{z} \times \hat{E}^{t'}_j(0) = -a_j \vec{z} \times \hat{E}^{t*}_j(e_j) - b_j \hat{H}^{t*}_j(e_j) + a_j \vec{z} \times \hat{E}^{t'}_{j+1}(0) + b_j \hat{H}^{t'}_{j+1}(0)$$

Nous posons :

$$F_j(e_j) = a_j \vec{z} \times \hat{E}^{t*}_j(e_j) + b_j \hat{H}^{t*}_j(e_j)$$

Ainsi :

$$\vec{z} \times \hat{E}_j^{t'}(0) = -F_j(e_j) + a_j \vec{z} \times \hat{E}_{j+1}^{t'}(0) + b_j \hat{H}_{j+1}^{t'}(0) \quad (3.21)$$

Nous multiplions l'expression (3.21) par l'admittance Y'_{j-1} , qu'il est possible d'écrire sous la forme :

$$Y'_{j-1} = \frac{c_j + Y'_j a_i}{a_i + Y'_i b_i} \quad (3.22)$$

D'après (3.14c), nous obtenons :

$$\vec{z} \times \hat{E}_j^{t'}(0) Y'_{j-1} + F_j(e_j) Y'_{j-1} = c_j \vec{z} \times \hat{E}_{j+1}^{t'}(0) + a_j \hat{H}_{j+1}^{t'}(0) \quad (3.23)$$

Nous exprimons aussi :

$$\hat{H}_j^{t'}(0) = -c_j \vec{z} \times \hat{E}_j^{t*}(e_j) - a_j \hat{H}_j^{t*}(e_j) + c_j \vec{z} \times \hat{E}_{j+1}^{t'}(0) + a_j \hat{H}_{j+1}^{t'}(0)$$

Nous posons

$$G_j(e_j) = c_j \vec{z} \times \hat{E}_j^{t*}(e_j) + a_j \hat{H}_j^{t*}(e_j)$$

Ainsi :

$$\hat{H}_j^{t'}(0) = -G_j(e_j) + c_j \vec{z} \times \hat{E}_{j+1}^{t'}(0) + a_j \hat{H}_{j+1}^{t'}(0) \quad (3.24)$$

En utilisant l'expression (3.23) dans (3.24), nous obtenons :

$$\hat{H}_j^{t'}(0) = -G_j(e_j) + Y'_{j-1} \vec{z} \times \hat{E}_j^{t'}(0) + F_j(e_j) Y'_{j-1} \quad (3.25)$$

De la même façon, en utilisant la matrice inverse, nous montrons, en introduisant :

$$F'_j(0) = a_j \vec{z} \times \hat{E}_j^{t*}(0) - b_j \hat{H}_j^{t*}(0)$$

$$G'_j(0) = -c_j \vec{z} \times \hat{E}_j^{t*}(0) + a_j \hat{H}_j^{t*}(0)$$

que :

$$\hat{H}_j^{t'}(e_j) = -G'_j(0) + Y_j \vec{z} \times \hat{E}_j^{t'}(e_j) + F'_j(0) Y_j \quad (3.26)$$

En utilisant (3.25) et (3.26), les relations de continuité des champs (3.19) et les expressions des F et G que nous avons introduits, nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} (Y_{j-1} - Y'_{j-1}) \vec{z} \times \hat{E}_{j-1}^{t'}(e_{j-1}) &= (-c_j + Y'_{j-1} a_j) \vec{z} \times \hat{E}_j^{t*}(e_j) \\ &+ (-a_j + Y'_{j-1} b_j) \hat{H}_j^{t*}(e_j) - Y'_{j-1} \vec{z} \times \hat{E}_j^{t*}(0) + \hat{H}_j^{t*}(0) \end{aligned} \quad (3.27a)$$

$$\begin{aligned} (Y_j - Y'_j) \vec{z} \times \hat{E}_{j+1}^{t'}(0) &= -(c_j + Y_j a_j) \vec{z} \times \hat{E}_j^{t*}(0) \\ &+ (a_j + Y_j b_j) \hat{H}_j^{t*}(0) + Y_j \vec{z} \times \hat{E}_j^{t*}(e_j) - \hat{H}_j^{t*}(e_j) \end{aligned} \quad (3.27b)$$

Les relations (3.27a) et (3.27b) nous permettent d'exprimer le champ homogène aux interfaces j et $j+1$ en fonction des champs particuliers du milieu j inhomogène.

3.5 Expression des champs particuliers

Nous pouvons écrire grâce à (1.50) et (1.56) que la solution électrique particulière est (3.28a).

$$\hat{E}_j^{d*} = -\frac{1}{2i\alpha_j} \int_{z'} \left[-i\omega\mu_j \hat{J}_j \left(\bar{I} + \frac{\hat{\Delta}}{k_j^2} \right) + \hat{M}_j(\vec{\sigma}, z') \hat{\nabla} \times \bar{I} \right] e^{i\alpha_j|z-z'|} dz' \quad (3.28a)$$

De même, nous pouvons écrire que la solution magnétique particulière est (3.28b).

$$\hat{H}_j^{d*} = -\frac{1}{2i\alpha_j} \int_{z'} \left[-i\omega\varepsilon_j \hat{M}_j \left(\bar{I} + \frac{\hat{\Delta}}{k_j^2} \right) - \hat{J}_j(\vec{\sigma}, z') \hat{\nabla} \times \bar{I} \right] e^{i\alpha_j|z-z'|} dz' \quad (3.28b)$$

Remarque Étant donné que les sources sont localisées dans la couche inhomogène j , l'intégration sur z' se limite à l'intégration sur z' compris entre $z' = z_{j-1}$ la valeur de z à l'interface supérieure et $z' = z_j$, la valeur de z à l'interface inférieure de la couche j .

3.6 Champ diffusé

Grâce aux relations de continuité des champs homogènes (1.18), à la matrice de transition (3.11) et aux relations (3.27a) et (3.27b), nous pouvons de façon récurrente remonter aux champs diffusés dans les milieux extrêmes pour une couche inhomogène j dans un multicouche :

$$\vec{z} \times \hat{E}_0 = \prod_{m=1}^{j-1} (a_m + b_m Y_m) \vec{z} \times \hat{E}_{j-1}^{t'}(e_{j-1}) \quad (3.29a)$$

$$\vec{z} \times \hat{E}_s = \prod_{m=p}^{j+1} (a_m - b_m Y'_{m-1}) \vec{z} \times \hat{E}_{j+1}^{t'}(0) \quad (3.29b)$$

Remarque Dans le cas d'un monocouche $j = 1$, il faut alors noter que $e_0 = 0$. Cette étape est donc inutile, le résultat est directement obtenu depuis (3.27a) et (3.27b).

Remarque (3.29a) et (3.29b) sont des fonctions linéaires des champs aux interfaces j et $j + 1$. Les champs aux interfaces (3.27a) et (3.27b) sont des fonctions linéaires des champs particuliers. Les champs particuliers (3.28a) et (3.28b) sont des fonctions linéaires de p si l'inhomogénéité est une fonction exponentielle de z (on écrira alors $p(x, y, z) = p(x, y) \exp(vz) \forall v$). Ainsi, les champs diffusés prennent, dans ce cas, la forme (3.30).

$$\vec{z} \times \hat{E}^d(0) = B_\varepsilon \hat{p} + B_\mu \hat{q} \quad (3.30)$$

3.7 Champs idéaux par la méthode ABE

Dans l'espace de Fourier, les champs idéaux ont pour solutions (1.32). Nous cherchons, alors, la valeurs des coefficients $\vec{A}^{X\pm}$ correspondant à la configuration du milieu. Pour le champ électrique nous noterons $\vec{A}^{E\pm} = \vec{A}^{\pm}$ et pour le champ magnétique $\vec{A}^{H\pm} = \vec{B}^{\pm}$.

Par définition [38], le coefficient de réflexion r_i est défini comme :

$$\vec{z} \times \vec{z} \times \vec{A}_i^- = r_i \vec{z} \times \vec{z} \times \vec{A}_i^+ \quad (3.31a)$$

$$\vec{z} \times \vec{z} \times \vec{A}_i^+ = \frac{1}{1 + r_i} \vec{z} \times \vec{z} \times \vec{A}_i^0 \quad (3.31b)$$

$$\vec{A}_i^0 = \vec{A}_i^+ + \vec{A}_i^- \quad (3.31c)$$

À partir de l'expression de l'admittance Y' (3.13) et la relation (3.14c) ainsi que la relation (3.8), l'admittance est calculée à partir du substrat car nous considérons un éclairage depuis le superstrat (l'air), nous pouvons montrer que :

$$\tilde{n}_i^0 \left(\vec{z} \times \vec{z} \times \hat{E}_i^{0+} - \vec{z} \times \vec{z} \times \hat{E}_i^{0-} \right) = Y_{i-1}'^0 \left(\vec{z} \times \vec{z} \times \hat{E}_i^{0+} + \vec{z} \times \vec{z} \times \hat{E}_i^{0-} \right)$$

Nous avons alors :

$$\frac{\vec{z} \times \vec{z} \times \hat{E}_i^{0-}}{\vec{z} \times \vec{z} \times \hat{E}_i^{0+}} = \frac{\tilde{n}_i^0 - Y_{i-1}'^0}{\tilde{n}_i^0 + Y_{i-1}'^0}$$

Remarque L'admittance $Y_{i-1}'^0$ est l'admittance de l'interface $i-1$, elle est donc calculée d'après l'indice i du milieu.

Remarque L'indication 0 de l'indice effectif et de l'admittance montre qu'il s'agit de l'indice effectif et de l'admittance du champ idéal, correspondant aux angles d'incidence i_0 et ϕ du champ incident.

Le champ électrique ($\vec{E}^{\pm} = \vec{A}^{\pm} e^{\pm i\alpha z}$) étant pris à l'interface (soit à $z = 0$), il est équivalent à son amplitude \vec{A}^{\pm} . Ainsi, nous obtenons le coefficient de réflexion du multicouche à chaque interface.

$$r_i = \frac{\tilde{n}_i^0 - Y_{i-1}'^0}{\tilde{n}_i^0 + Y_{i-1}'^0} \quad (3.32)$$

Remarque Pour le calcul du coefficient de réflexion de la première couche r_0 , l'admittance $Y_{-1}'^0$ est égale à l'admittance $Y_0'^0$ (3.13) puisqu'alors e_0 est égale à zéro.

Pour obtenir la valeur des \vec{A}_i^0 , nous devons utiliser les mêmes types de relations que celle utilisées pour le champ diffusé dans la section 3.6. Contrairement au cas du calcul du champ diffusé, l'éclairage provient de l'air, nous ne pouvons alors utiliser que l'admittance calculée depuis le substrat [38]. Nous avons alors :

$$\vec{z} \times \vec{z} \times \vec{A}_i^0(e_i) = \left(a_i - b_i Y_{i-1}'^0 \right) \vec{z} \times \vec{z} \times \vec{A}_{i-1}^0(e_{i-1}) \quad (3.33a)$$

Remarque (3.33a) est utilisé pour calculer l'amplitude du champ aux interfaces inférieures. En effet, hormis les milieux 0 et s , le champ possède deux amplitudes différentes selon qu'il est à l'interface supérieur ou inférieur. (1.18a) nous permet d'écrire (3.33b), elle est utilisée pour calculer l'amplitude du champ aux interfaces supérieures.

$$\vec{z} \times \vec{z} \times \vec{A}_i^0(0) = \vec{z} \times \vec{z} \times \vec{A}_{i-1}^0(e_{i-1}) \quad (3.33b)$$

En procédant par récurrence à partir de la valeur de \vec{A}_0^0 initiale, qui s'exprime à partir de la valeur connue de \vec{A}_0^+ (amplitude du champ électrique incident) d'après (3.34), nous obtenons l'expression du champ électrique idéal dans chaque milieu.

$$\vec{z} \times \vec{z} \times \vec{A}_0^0 = (1 + r_0) \vec{z} \times \vec{z} \times \vec{A}_0^+ \quad (3.34)$$

Remarque Pour obtenir, le champ dans le dernier milieu, il suffit de poser que le coefficient de réflexion est nul. Ce qui est vrai, puisqu'il n'existe pas d'onde rétrograde dans ce milieu et que $Y_{s-1}'^0 = \tilde{n}_s^0$.

Les expressions obtenues ne donnent que les composantes tangentielles du champ, il manque la composante z . S'agissant de champs idéaux, donc homogènes, la divergence de ces champs est nulle. En calculant cette divergence et en séparant les contributions progressive et rétrograde, nous obtenons :

$$A_{i,z}^+ = -\frac{\vec{\sigma}_0 \cdot \vec{A}_i^+}{\alpha_i^0} \quad (3.35a)$$

$$A_{i,z}^- = \frac{\vec{\sigma}_0 \cdot \vec{A}_i^-}{\alpha_i^0} \quad (3.35b)$$

Le champ magnétique étant relié au champ électrique par (3.2a) et (3.2b), nous pouvons écrire (3.36).

$$\vec{B}_i^+ = \frac{1}{\omega\mu_i} \begin{pmatrix} \sigma_y^0 A_{i,z}^+ - \alpha_i^0 A_{i,y}^+ \\ \alpha_i^0 A_{i,x}^+ - \sigma_x^0 A_{i,z}^+ \\ \sigma_x^0 A_{i,y}^+ - \sigma_y^0 A_{i,x}^+ \end{pmatrix} \quad (3.36a)$$

$$\vec{B}_i^- = \frac{1}{\omega\mu_i} \begin{pmatrix} \sigma_y^0 A_{i,z}^- + \alpha_i^0 A_{i,y}^- \\ -\alpha_i^0 A_{i,x}^- - \sigma_x^0 A_{i,z}^- \\ \sigma_x^0 A_{i,y}^- - \sigma_y^0 A_{i,x}^- \end{pmatrix} \quad (3.36b)$$

3.8 Validations

Après avoir mis au point la méthode, nous l'avons validé sur les mêmes exemples que pour la méthode matricielle EMFORS. Nous avons obtenu, par exemple, pour le cas de la Cryolite 10L, les résultats représentés sur la figure 3.3.

Nous observons que la méthode ABE donne exactement le même résultat que [34] et que la méthode EMFORS pour la polarisation SS (\vec{E} incident et diffusé sont perpendiculaire au plan d'incidence xOz). Les méthodes ABE et EMFORS donnent également un

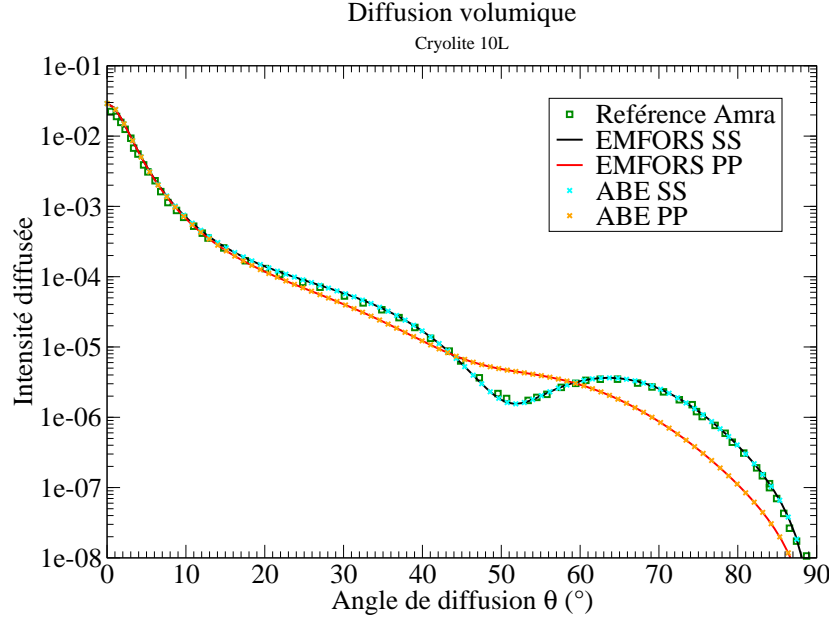


Figure 3.3 – Diffusion volumique en réflexion d'un monocouche sur verre. Cryolite 10L. Comparaison de la méthode ABE avec la méthode EMFORS et les résultats de Amra [34].

très bon accord en polarisation PP (\vec{H} incident et diffusé sont perpendiculaire au plan d'incidence xOz).

Les limites de validité de la méthode sont les mêmes que pour la méthode EMFORS. Lorsque l'indice et/ou l'épaisseur augmente l'accord avec le calcul exact se dégrade.

3.9 Solution analytique

L'avantage de la méthode ABE est la possibilité d'obtenir une solution analytique. La forme analytique n'est pas exploitable facilement dans le cas d'un empilement quelconque mais elle devient simple dans le cas d'une couche de matériau et permet de faire des études paramétriques indépendantes de la fluctuation. Dans le cas d'une couche mince, la forme analytique est exploitable directement et permet une évaluation rapide de la diffusion. Cette étude analytique fera l'objet du Chapitre 5.

Chapitre 4

Méthode RECY

La méthode RECY [39] repose sur l'approximation du premier ordre et sur le principe de réciprocité.

Le principe de réciprocité est initialement attribué à Lorentz [40] en 1896. En 1954, Crowley [41] indique que le théorème de réciprocité devenait de plus en plus important avec le développement des analyses théoriques. En effet, il précise que la réciprocité prend diverses formes (en fonction principalement des sources) parfois surprenantes. Il ajoute que la relation est d'autant plus utile que la forme choisie est adaptée au problème étudié. Peu de temps après, Rumsey [42] expose le concept d'action-réaction pour l'électromagnétisme et fait le parallèle avec le théorème de réciprocité.

En 1955, Saxon [43] définit la matrice de diffusion S pour les champs électromagnétiques et montre que cette matrice est symétrique ($S(x, x') = S^T(-x', x)$), ce qui constitue une condition de réciprocité. Cette propriété de la matrice de diffusion est utilisée par la suite par Nieto-Vesperinas et Wolf [44], des propriétés sur les coefficients de transmission et de réflexion sont déduites un peu plus tard par Nieto-Vesperinas [45].

En 1992, Tai [46] aborde la démonstration du théorème de réciprocité de façon différente en utilisant le second théorème de Green. Il utilise la symétrie de la dyade de Green, que nous retrouvons exploitée un peu plus tard par Hill [47]. Dans les deux cas, les sources utilisées sont des dipôles. Nous retrouvons l'utilisation de ses dipôles également dans [48].

Plus récemment, en 2007, Polat [49] étend le théorème de réciprocité à des multicouches, en utilisant la validité du théorème au sens des distributions. La forme du théorème peut alors prendre différentes formes en fonction des sources. Ce qui fait écho au propos de Crowley en 1954.

En 2012, l'étude Yegin [50] apporte une vision relativement plus complète de l'utilisation de la réciprocité. Il fait notamment une remarque intéressante sur la nécessité de connaître explicitement la forme des sources pour l'application de la réciprocité.

4.1 Théorème de réciprocité

Nous nous attachons dans cette section à démontrer le principe de réciprocité. Il est basé sur une combinaison linéaire des équations de Maxwell. La forme intégrale peut-être obtenue d'après la forme différentielle résultant des combinaisons linéaires des équations de Maxwell ou, de façon alternative, en utilisant le second théorème de Green.

4.1.1 Forme différentielle

Soient les champs (\vec{E}^a, \vec{H}^a) et (\vec{E}^b, \vec{H}^b) générés respectivement par les sources monochromatiques (\vec{J}^a, \vec{M}^a) et (\vec{J}^b, \vec{M}^b) dans une géométrie fixée. Les champs vérifient les équations de Maxwell au sens des distributions :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}^a = \vec{M}^a + \imath\omega\mu\vec{H}^a \quad (4.1a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}^a = -\vec{J}^a - \imath\omega\varepsilon\vec{E}^a \quad (4.1b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}^b = \vec{M}^b + \imath\omega\mu\vec{H}^b \quad (4.2a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}^b = -\vec{J}^b - \imath\omega\varepsilon\vec{E}^b \quad (4.2b)$$

Les opérations suivantes sont effectuées :

$$\vec{H}^b \cdot (4.1a) - \vec{H}^a \cdot (4.2a) + \vec{E}^b \cdot (4.1b) - \vec{E}^a \cdot (4.2b) \quad (4.3)$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} & \vec{H}^b \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}^a) - \vec{H}^a \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}^b) + \vec{E}^b \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}^a) - \vec{E}^a \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}^b) \\ = & \vec{H}^b \cdot (\vec{M}^a + \imath\omega\mu\vec{H}^a) - \vec{H}^a \cdot (\vec{M}^b + \imath\omega\mu\vec{H}^b) - \vec{E}^b \cdot (\vec{J}^a + \imath\omega\varepsilon\vec{E}^a) + \vec{E}^a \cdot (\vec{J}^b + \imath\omega\varepsilon\vec{E}^b) \end{aligned} \quad (4.4)$$

D'après la règle (C.3) et en développant un peu les termes, on obtient :

$$\begin{aligned} & - \left(\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}^b \times \vec{H}^a) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{H}^b \times \vec{E}^a) \right) \\ = & \vec{H}^b \cdot \vec{M}^a - \vec{H}^a \cdot \vec{M}^b - \vec{E}^b \cdot \vec{J}^a + \vec{E}^a \cdot \vec{J}^b \\ + & \imath\omega \left(\vec{E}^a \cdot \varepsilon \vec{E}^b - \vec{E}^b \cdot \varepsilon \vec{E}^a \right) + \imath\omega \left(\vec{H}^b \cdot \mu \vec{H}^a - \vec{H}^a \cdot \mu \vec{H}^b \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Soient ε^T (resp. μ^T) le tenseur transposé de ε (resp. μ) et \vec{A} et \vec{B} des vecteurs quelconques alors [42] :

$$\vec{A} \cdot \varepsilon \vec{B} = \vec{B} \cdot \varepsilon^T \vec{A} \quad (4.6)$$

Si ε et μ sont des tenseurs symétriques (c'est-à-dire qu'ils sont équivalents à leur transposé $\varepsilon^T = \varepsilon$), l'équation se réécrit :

$$- \left(\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}^a \times \vec{H}^b - \vec{E}^b \times \vec{H}^a) \right) = \left(\vec{E}^b \cdot \vec{J}^a - \vec{H}^b \cdot \vec{M}^a \right) - \left(\vec{E}^a \cdot \vec{J}^b - \vec{H}^a \cdot \vec{M}^b \right) \quad (4.7)$$

L'équation (4.7) est le principe de réciprocité. Elle est valide au sens des distributions [49] car elle découle directement des équations de Maxwell.

4.1.2 Forme intégrale d'après la forme différentielle

En prenant l'intégrale de l'équation (4.7) pour n'importe quel volume V contenant les sources, nous obtenons :

$$- \iiint_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{E}^a \times \vec{H}^b - \vec{E}^b \times \vec{H}^a) dV = \iiint_V \left[\left(\vec{E}^b \cdot \vec{J}^a - \vec{H}^b \cdot \vec{M}^a \right) - \left(\vec{E}^a \cdot \vec{J}^b - \vec{H}^a \cdot \vec{M}^b \right) \right] dV$$

Grâce au théorème de la divergence :

$$-\oint_S (\vec{E}^a \times \vec{H}^b - \vec{E}^b \times \vec{H}^a) \cdot d\vec{S} = \iiint_V \left[(\vec{E}^b \cdot \vec{J}^a - \vec{H}^b \cdot \vec{M}^a) - (\vec{E}^a \cdot \vec{J}^b - \vec{H}^a \cdot \vec{M}^b) \right] dV \quad (4.8)$$

Pour une région infinie, l'équation (4.9) est satisfaite sous la condition de radiation en champ lointain, en raison du comportement asymptotique des composantes des champs.

$$\oint_S (\vec{E}^a \times \vec{H}^b - \vec{E}^b \times \vec{H}^a) \cdot d\vec{S} = 0 \quad (4.9)$$

Pour une région finie, les champs doivent satisfaire la condition suivante sur la surface S délimitant le domaine :

$$(\vec{E}^a \times \vec{H}^b - \vec{E}^b \times \vec{H}^a) \Big|_S = \vec{0}$$

Ainsi, l'équation (4.8) se réduit à l'équation (4.10) :

$$\iiint_V (\vec{E}^b \cdot \vec{J}^a - \vec{H}^b \cdot \vec{M}^a) dV = \iiint_V (\vec{E}^a \cdot \vec{J}^b - \vec{H}^a \cdot \vec{M}^b) dV \quad (4.10)$$

4.1.3 Forme intégrale par le second théorème de Green

En utilisant le second théorème de Green, il est possible de retrouver la forme intégrale du théorème de réciprocité [46]. Nous partons du théorème d'Ostrogradski, qui transforme une intégrale de volume en une intégrale de surface :

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (4.11)$$

où V est le volume délimité par la surface fermée S . En posant $\vec{A} = \vec{P} \times \vec{\nabla} \times \vec{Q}$, on a :

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{P} \times \vec{\nabla} \times \vec{Q}) dV = \oint_S (\vec{P} \times \vec{\nabla} \times \vec{Q}) \cdot d\vec{S}$$

Sachant que $\forall (\vec{A}, \vec{B}), \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$, nous obtenons avec $\vec{A} = \vec{P}$ et $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{Q}$:

$$\iiint_V [(\vec{\nabla} \times \vec{Q}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{P}) - \vec{P} \cdot (\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{Q}))] dV = \oint_S (\vec{P} \times \vec{\nabla} \times \vec{Q}) \cdot d\vec{S}$$

Puisque \vec{P} et \vec{Q} sont quelconques, l'équation précédente peut s'écrire également en permutant \vec{Q} avec \vec{P} . En faisant alors la différence entre les deux équations, nous obtenons :

$$\iiint_V [\vec{Q} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{P}) - \vec{P} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{Q})] dV = \oint_S (\vec{P} \times \vec{\nabla} \times \vec{Q} - \vec{Q} \times \vec{\nabla} \times \vec{P}) \cdot d\vec{S} \quad (4.12)$$

L'équation (4.12) correspond au second théorème de Green. En posant $\vec{P} = \vec{E}^a$ et $\vec{Q} = \vec{E}^b$, nous retrouvons la forme intégrale du théorème de réciprocité à la condition que la perméabilité et la perméabilité soient des constantes. C'est le cas dans le cadre de l'approximation du premier ordre car les fluctuations sont déjà intégrées dans les sources.

4.2 RECY - Illustration pour une couche diélectrique

Nous cherchons à calculer le champ diffusé par une couche dont la permittivité fluctue en utilisant le principe de réciprocité et l'approximation du premier ordre. Dans ce but, nous avons mis au point une méthode baptisée RECY. Cette méthode nécessite trois phases.

Dans un premier temps, nous devons définir les deux configurations nécessaire à l'application du principe de réciprocité. Ces deux configuration doivent représenter la même couche avec des sources différentes. La configuration *a* possède une source dipolaire à l'endroit où l'on cherche à évaluer le champ diffusé. La configuration *b* est celle de la couche dont la permittivité fluctue.

Grâce à l'approximation du premier ordre, nous pouvons dans un second temps transformer cette fluctuation en une source.

Finalement, nous pouvons appliquer le principe de réciprocité et ainsi obtenir le champ diffusé.

4.2.1 Configuration *a*

La configuration *a* est celle où le milieu idéal est éclairé par un dipôle placé là où nous cherchons à connaître le champ diffusé. Nous cherchons à exprimer le champ diffusé lointain. Nous considérons donc un dipôle à l'infini, qui va générer une onde plane dont l'amplitude dépendra de la dimension et de l'espace considéré.

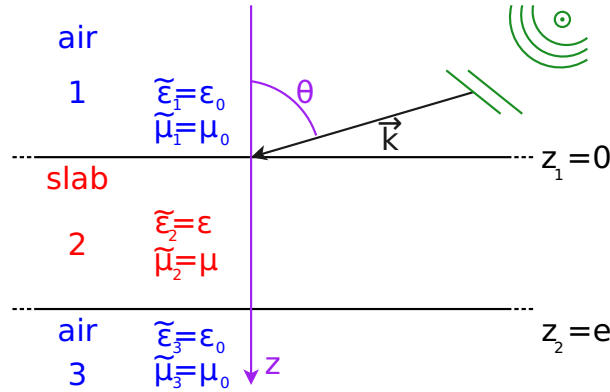


Figure 4.1 – Configuration *a* pour l'exemple de la couche diélectrique.

Nous considérons un dipôle à l'infini $\vec{\rho}_\infty$ orienté selon le vecteur unitaire \vec{d} qui génère un courant, source de la configuration *a*. Ce courant est donné par :

$$\vec{J}^a = -Il\vec{d}\delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}_\infty) \quad (4.13)$$

Le dipôle à l'infini génère une onde plane \vec{E}^{dip} d'amplitude IlA^{dip} .

Nous pouvons donc utiliser le calcul du champ dans l'objet éclairé par une onde plane unitaire orientée comme \vec{E}^{dip} pour calculer le champ \vec{E}^a . Le champ \vec{E}^a est retrouvé en multipliant \vec{E}^a par l'amplitude IlA^{dip} .

L'amplitude A^{dip} dépend de la dimension de l'espace. Elle est donnée par (cf. Annexe E) :

- En 2D : $A_{2D}^{dip} = -\frac{\omega\mu}{4\pi}\sqrt{\lambda}$
- En 3D : $A_{3D}^{dip} = i\frac{\omega\mu}{4\pi}$

4.2.2 Configuration b

La configuration b est celle de la couche défectueuse. Cette configuration consiste donc en une couche inhomogène éclairée par le champ incident. L'inhomogénéité s'écrit comme une fluctuation de la permittivité (ou perméabilité) :

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon((1 + p(\vec{\rho}))) \quad (4.14)$$

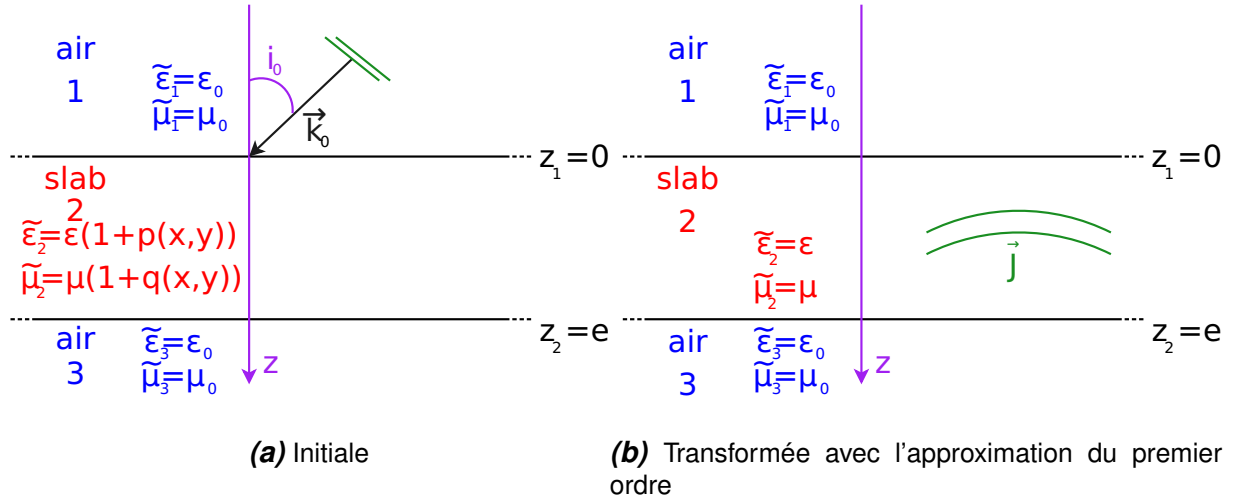


Figure 4.2 – Configuration b pour l'exemple de la couche diélectrique

Grâce à l'approximation du premier ordre, il est possible de transformer cette inhomogénéité en une source effective dans le milieu idéal.

Nous avons alors comme source de la configuration b le courant équivalent à l'inhomogénéité :

$$\vec{J}^b = i\omega\varepsilon p(\vec{\rho})\vec{E}^0(\vec{r}, z) \quad (4.15)$$

où $p(\vec{\rho}) = p(\vec{r}, z)(\mathcal{H}(z) - \mathcal{H}(z - e))$ dans le cas de la couche, avec $(p(\vec{r}, z))$ une fonction continue de z .

4.2.3 Champ diffusé en réflexion

Le théorème de réciprocité pour le cas diélectrique s'écrit :

$$\iiint_V \vec{E}^b \cdot \vec{J}^a d\vec{\rho} = \iiint_V \vec{E}^a \cdot \vec{J}^b d\vec{\rho}$$

En remplaçant les termes par les expressions précédentes nous obtenons le champ diffusé par des fluctuations de permittivité :

$$\vec{E}^b(\vec{\rho}_\infty) \cdot \vec{d} = A^{dip} \iiint_V i\omega\varepsilon p(\vec{\rho}) \vec{E}^a \cdot \vec{E}^0(\vec{\rho}) dV \quad (4.16)$$

Nous avons illustré le principe de la méthode par l'application simple d'une couche. Les champs homogènes \vec{E}^a et \vec{E}^0 peuvent être calculés en utilisant n'importe quelle méthode (analytique, éléments finis, ...). Nous pouvons alors, en gardant le même formalisme, obtenir les champs diffusés pour n'importe quel espace (Fourier/Direct, 2D/3D). Il suffit pour passer d'un espace à l'autre de connaître l'amplitude de l'onde plane générée par le dipôle.

Finalement, pour calculer le champ diffusé par un objet hétérogène, il suffit de connaître l'équivalence entre le défaut et une fluctuation de permittivité (ou perméabilité) ainsi que le champ dans l'objet sous les différentes incidences observées.

4.3 RECY dans l'espace de Fourier

Nous avons vu que le calcul du champ diffusé au premier ordre passe par celui du champ homogène dans l'objet. Lorsque l'on souhaite utiliser une méthode de calcul dans l'espace de Fourier au lieu de l'espace réel, il est nécessaire de développer RECY pour cet espace. Pour cela nous devons d'abord établir le principe de réciprocité dans l'espace de Fourier.

4.3.1 Établissement du théorème de réciprocité dans l'espace de Fourier

Soient les champs (\vec{E}^a, \vec{H}^a) et (\vec{E}^b, \vec{H}^b) générés par les sources monochromatiques (\vec{J}^a, \vec{M}^a) et (\vec{J}^b, \vec{M}^b) , les champs vérifient les équations de Maxwell au sens des distributions :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}^a = \vec{M}^a + i\omega\mu\vec{H}^a \quad (4.17a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}^a = -\vec{J}^a - i\omega\varepsilon\vec{E}^a \quad (4.17b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}^b = \vec{M}^b + i\omega\mu\vec{H}^b \quad (4.18a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}^b = -\vec{J}^b - i\omega\varepsilon\vec{E}^b \quad (4.18b)$$

Dans l'espace de Fourier, les champs électriques et magnétiques ayant la même dépendance en z , nous pouvons écrire :

$$\vec{k} \times \hat{E}^a = \hat{M}^a + i\omega\hat{\mu} * \hat{H}^a \quad (4.19a)$$

$$\vec{k} \times \hat{H}^a = -\hat{J}^a - i\omega\hat{\varepsilon} * \hat{E}^a \quad (4.19b)$$

$$\vec{k} \times \hat{E}^b = \hat{M}^b + i\omega\hat{\mu} * \hat{H}^b \quad (4.20a)$$

$$\vec{k} \times \hat{H}^b = -\hat{J}^b - i\omega\hat{\varepsilon} * \hat{E}^b \quad (4.20b)$$

où l'opérateur $*$ désigne une convolution.

Les opérations suivantes sont effectuées :

$$\hat{\vec{H}}^b \cdot (4.19a) + \hat{\vec{H}}^a \cdot (4.20a) + \hat{\vec{E}}^b \cdot (4.19b) + \hat{\vec{E}}^a \cdot (4.20b) \quad (4.21)$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} & \hat{\vec{H}}^b \cdot (\vec{k} \times \hat{\vec{E}}^a) + \hat{\vec{H}}^a \cdot (\vec{k} \times \hat{\vec{E}}^b) + \hat{\vec{E}}^b \cdot (\vec{k} \times \hat{\vec{H}}^a) + \hat{\vec{E}}^a \cdot (\vec{k} \times \hat{\vec{H}}^b) \\ &= \hat{\vec{H}}^b \cdot (\hat{\vec{M}}^a + \imath\omega\hat{\mu} * \hat{\vec{H}}^a) + \hat{\vec{H}}^a \cdot (\hat{\vec{M}}^b + \imath\omega\hat{\mu} * \hat{\vec{H}}^b) - \hat{\vec{E}}^b \cdot (\hat{\vec{J}}^a + \imath\omega\hat{\varepsilon} * \hat{\vec{E}}^a) - \\ & \quad \hat{\vec{E}}^a \cdot (\hat{\vec{J}}^b + \imath\omega\hat{\varepsilon} * \hat{\vec{E}}^b) \end{aligned} \quad (4.22)$$

L'équation (4.22) et la propriété (C.17), nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} & \hat{\vec{H}}^b \cdot \hat{\vec{M}}^a + \hat{\vec{H}}^a \cdot \hat{\vec{M}}^b + \imath\omega \left[\hat{\vec{H}}^b \cdot (\hat{\mu} * \hat{\vec{H}}^a) + \hat{\vec{H}}^a \cdot (\hat{\mu} * \hat{\vec{H}}^b) \right] \\ &= \hat{\vec{E}}^b \cdot \hat{\vec{J}}^a + \hat{\vec{E}}^a \cdot \hat{\vec{J}}^b + \imath\omega \left[\hat{\vec{E}}^b \cdot (\hat{\varepsilon} * \hat{\vec{E}}^a) + \hat{\vec{E}}^a \cdot (\hat{\varepsilon} * \hat{\vec{E}}^b) \right] \end{aligned} \quad (4.23)$$

L'équation (4.23) est alors la formulation générale du théorème de réciprocité dans l'espace de Fourier.

Lorsque la permittivité ε et la perméabilité μ ne sont que des fonctions de z (empilement de couches infinies selon z), l'équation (4.23) devient :

$$\begin{aligned} & \hat{\vec{H}}^b \cdot \hat{\vec{M}}^a + \hat{\vec{H}}^a \cdot \hat{\vec{M}}^b + 2\imath\omega\hat{\mu}\hat{\vec{H}}^b \cdot \hat{\vec{H}}^a \\ &= \hat{\vec{E}}^b \cdot \hat{\vec{J}}^a + \hat{\vec{E}}^a \cdot \hat{\vec{J}}^b + 2\imath\omega\hat{\varepsilon}\hat{\vec{E}}^a \cdot \hat{\vec{E}}^b \end{aligned} \quad (4.24)$$

Grâce à la transformée de Fourier des équations de Maxwell, nous pouvons écrire :

$$\vec{k} \times \hat{\vec{E}} - \hat{\vec{M}} = \imath\omega\hat{\mu}\hat{\vec{H}} \quad (4.25a)$$

$$\vec{k} \times \hat{\vec{H}} + \hat{\vec{J}} = -\imath\omega\hat{\varepsilon}\hat{\vec{E}} \quad (4.25b)$$

L'équation (4.24) devient :

$$\begin{aligned} & \hat{\vec{H}}^b \cdot \hat{\vec{M}}^a + \hat{\vec{H}}^a \cdot \hat{\vec{M}}^b + 2\hat{\vec{H}}^b \cdot (\vec{k} \times \hat{\vec{E}}^a - \hat{\vec{M}}^a) \\ &= \hat{\vec{E}}^b \cdot \hat{\vec{J}}^a + \hat{\vec{E}}^a \cdot \hat{\vec{J}}^b - 2\hat{\vec{E}}^a \cdot (\vec{k} \times \hat{\vec{H}}^b + \hat{\vec{J}}^b) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Puis :

$$\begin{aligned} & 2\hat{\vec{H}}^b \cdot (\vec{k} \times \hat{\vec{E}}^a) + 2\hat{\vec{E}}^a \cdot (\vec{k} \times \hat{\vec{H}}^b) \\ &= \hat{\vec{E}}^b \cdot \hat{\vec{J}}^a - \hat{\vec{E}}^a \cdot \hat{\vec{J}}^b + \hat{\vec{H}}^b \cdot \hat{\vec{M}}^a - \hat{\vec{H}}^a \cdot \hat{\vec{M}}^b \end{aligned} \quad (4.27)$$

La propriété (C.17), nous permet d'écrire finalement :

$$\hat{\vec{E}}^b \cdot \hat{\vec{J}}^a + \hat{\vec{H}}^b \cdot \hat{\vec{M}}^a = \hat{\vec{E}}^a \cdot \hat{\vec{J}}^b + \hat{\vec{H}}^a \cdot \hat{\vec{M}}^b \quad (4.28)$$

En intégrant (4.28) sur z , nous obtenons une forme intégrale du principe de réciprocité dans l'espace de Fourier :

$$\int_z (\hat{\vec{E}}^b \cdot \hat{\vec{J}}^a + \hat{\vec{H}}^b \cdot \hat{\vec{M}}^a) dz = \int_z (\hat{\vec{E}}^a \cdot \hat{\vec{J}}^b + \hat{\vec{H}}^a \cdot \hat{\vec{M}}^b) dz \quad (4.29)$$

4.3.2 Configuration *a*

Nous considérons un dipôle à l'infini $\vec{\rho}_\infty$ orienté le long du vecteur unitaire \vec{d} . Ce dipôle génère un courant donné par :

$$\hat{\vec{J}}^a = -\frac{1}{4\pi^2} Il e^{-i\vec{\sigma} \cdot \vec{r}_\infty} \vec{d} \delta(z - z_\infty) \quad (4.30)$$

Pour obtenir le champ produit par ce courant nous utilisons la dyade de Green. En effet, nous avons vu à la Section 1.4.2.2 que la transformée de Fourier du champ électrique $\hat{\vec{E}}$ créé par la transformée de Fourier d'un courant électrique $\hat{\vec{J}}$ est donné par l'équation (4.31).

$$\hat{\vec{E}}(\vec{\sigma}, z) = -i\omega\mu \int_z \left(\hat{\vec{J}}(\vec{\sigma}', z') \cdot \hat{\vec{G}}(\vec{\sigma}, z, \vec{\sigma}', z') \right) dz' \quad (4.31)$$

avec la dyade de Green en Fourier : $\hat{\vec{G}} = \left(\bar{I} + \hat{\vec{\nabla}}/k^2 \right) g(z, z')$ et la fonction de Green : $g(z, z') = \exp(i\alpha|z - z'|)/(2i\alpha)$. On a :

$$\vec{E}(\vec{\sigma}, z) = i\omega\mu Il \frac{1}{4\pi^2} e^{-i\vec{\sigma} \cdot \vec{r}_\infty} \left(\vec{d} \cdot \hat{\vec{G}}(\vec{\sigma}, z, \vec{\sigma}_\infty, z_\infty) \right) \quad (4.32)$$

soit :

$$\vec{E}(\vec{\sigma}, z) = Il \frac{1}{4\pi^2} \frac{\omega\mu}{2\alpha} e^{-i\vec{\sigma} \cdot \vec{r}_\infty} \vec{d} \cdot \hat{\vec{\Sigma}}(\vec{\sigma}, z) \quad (4.33)$$

Le dipôle génère donc une onde plane d'amplitude $\hat{A}_{3D}^{dip} Il \frac{1}{4\pi^2} e^{-i\vec{\sigma} \cdot \vec{r}_\infty}$:

$$\hat{A}_{3D}^{dip} = \frac{\omega\mu}{2\alpha} \quad (4.34)$$

orienté le long du vecteur $\vec{d} \cdot \hat{\vec{\Sigma}}(\vec{\sigma}, z)$ avec $\hat{\vec{\Sigma}}(\vec{\sigma}, z) = \left(\bar{I} + \frac{\hat{\vec{\nabla}}}{k^2} \right) e^{i\alpha|z - z_\infty|}$

Pour obtenir le champ dans la couche $\hat{\vec{E}}^a$, il suffit par exemple d'utiliser la méthode des matrices pour une couche homogène éclairée par l'onde plane créée par le dipôle. En prenant pour ce calcul une onde plane d'amplitude unité, il nous suffit de multiplier le champ $\hat{\vec{E}}^a$ obtenu par l'amplitude de l'onde plane générée par le dipôle $\hat{A}_{3D}^{dip} Il \frac{1}{4\pi^2} e^{-i\vec{\sigma} \cdot \vec{r}_\infty}$ pour calculer le champ $\hat{\vec{E}}^a$.

4.3.3 Configuration *b*

Comme dans le cas direct, la configuration *b* peut, grâce à l'approximation du premier ordre, être remplacée par un objet homogène contenant une source équivalente.

Nous avons dans l'espace de Fourier la source équivalente :

$$\hat{\vec{J}}^b = -i\omega\varepsilon \hat{p}(\vec{\sigma} - \vec{\sigma}_0, z) \hat{\vec{E}}^0(\vec{\sigma}_0, z) \quad (4.35)$$

où $\hat{p}(\vec{\sigma}, z) = \hat{p}(\vec{\sigma}, z) (\mathcal{H}(z) - \mathcal{H}(z - e))$ dans le cas de la couche, avec $\hat{p}(\vec{\sigma}, z)$ une fonction continue de z .

4.3.4 Champ diffusé en réflexion

Le théorème de réciprocité dans l'espace de Fourier (4.29) pour le cas diélectrique s'écrit :

$$\int_z \hat{\vec{E}}^b \cdot \hat{\vec{J}}^a dz = \int_z \hat{\vec{E}}^a \cdot \hat{\vec{J}}^b dz$$

En remplaçant les termes par les expressions précédentes nous obtenons le champ diffusé par des fluctuations de permittivité :

$$\hat{\vec{E}}^b(z_\infty) \cdot \vec{d} = i\omega\epsilon\hat{A}_{3D}^{dip} \int_{z=0}^e \hat{p}(\vec{\sigma} - \vec{\sigma}_0, z) \hat{\vec{E}}^a \cdot \hat{\vec{E}}_2^0 dz \quad (4.36)$$

4.4 Validation

La méthode RECY est une méthode qui nous permet de calculer le champ diffusé de n'importe quel objet sous réserve que nous puissions calculer le champ dans cet objet pour toutes les incidences que l'on souhaite étudier.

Nous avons dans un premier temps appliqué la méthode sur les cas des couches de la section 2.7. Nous avons obtenu, par exemple, pour le cas de la Cryolite 20L, les résultats représentés sur la figure 4.3.

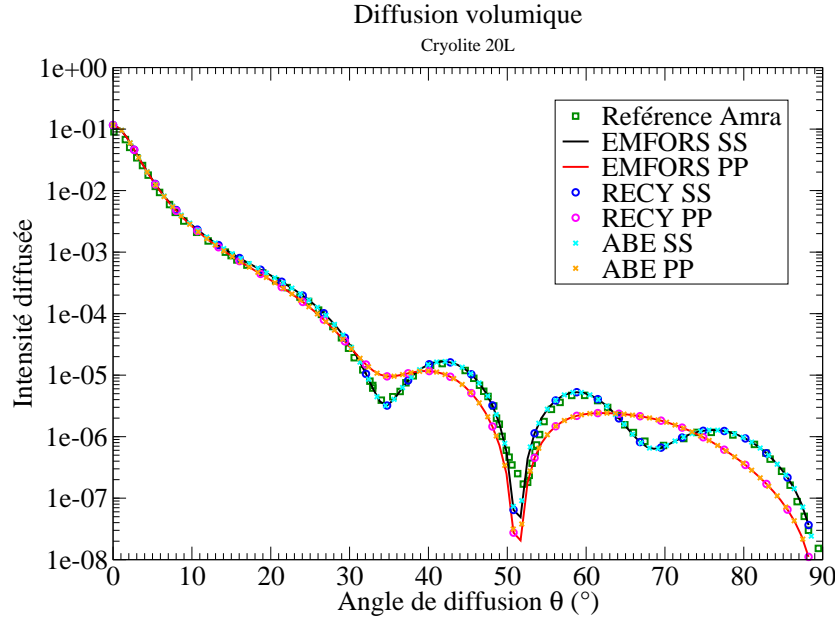


Figure 4.3 – Diffusion volumique en réflexion d'une couche sur verre. Cryolite 20L. Comparaison de la méthode RECY avec la méthode ABE, la méthode EMFORS et les résultats de Amra [34].

On observe un très bon accord de la méthode RECY avec les autres méthodes aussi bien en polarisation SS (\vec{E} incident et diffusé sont perpendiculaires au plan d'incidence xOz) qu'en polarisation PP (\vec{H} incident et diffusé sont perpendiculaires au plan d'incidence xOz).

Les limites de validité de la méthode RECY sont en grande partie dépendantes de la limite de validité du champ dans l'objet. Ainsi si le calcul du champ est fait pour un objet de dimension x, y infini (solution analytique ou calcul par éléments finis périodique) la comparaison à un objet fini aura les mêmes limitations que celles évoquées à la Section 2.9. L'avantage de la méthode RECY est qu'il est possible d'utiliser un calcul par éléments finis du champ dans l'objet (Voir par exemple l'application sur les réseau du Chapitre 6). Nous n'avons alors plus de limitation lié à l'effet des bords.

4.5 Efficacité

La méthode RECY est une méthode efficace pour traiter des statistiques de défauts. En effet, elle ne nécessite qu'une seule résolution des équations de Maxwell d'un milieu homogène. A contrario, les méthodes classiques type Monte-Carlo imposent de tirer un grand nombre de configurations de défauts pour être représentatifs de la statistique et de réaliser un calcul éléments finis pour chaque tirage, ce qui peut rapidement devenir très coûteux.

Le calcul du champ idéal peut également être effectué sur une seule période pour un milieu periodique (en ajustant la phase) ce qui apporte un gain de temps supplémentaire. Il faut néanmoins remarquer que l'objet sera infini (attention à la limite de validité). Néanmoins, seul le calcul du champ idéal est périodisé pas le défaut.

Profile Summary
Generated 21-Jul-2014 10:51:53 using cpu time.

Function Name	Calls	Total Time	Self Time*	Total Time Plot (dark band = self time)
timerunrecy	1	0.696 s	0.019 s	
integrale	90	0.467 s	0.067 s	
trapz	2880	0.400 s	0.276 s	
lecturenb_complex	1	0.200 s	0.172 s	
shiftdim	2880	0.124 s	0.124 s	
strcat	92	0.029 s	0.029 s	
num2str	1	0.010 s	0.010 s	
blanks	92	0 s	0.000 s	
int2str	1	0 s	0.000 s	
geopcprop	1	0 s	0.000 s	

Figure 4.4 – Temps de calcul de RECY pour un défaut.

Par exemple pour le cas du réseau du Chapitre 6, nous avons pour la méthode RECY besoin de 42 s pour calculer la carte de champ homogène. L'exportation de la carte peut être coûteuse si on veut le champ sur l'ensemble de la structure. Ici, nous l'avons exportée uniquement sur l'inclusion concernée par le défaut, ce qui prend très peu de temps (moins d'une seconde). Le calcul du champ diffusé par un défaut avec la méthode RECY (cf. Figure 4.4) prend 0.6 ± 0.1 s dont 0.19 ± 0.02 s de lecture de la carte de champ.

Les temps indiqués dans la figure 4.4 sont donnés à titre d'exemple, c'est pourquoi ils diffèrent légèrement des temps que nous venons de donner.

Le calcul exact nécessite 20 s pour calculer le champ homogène et 20 s pour chaque défaut. Il faut ensuite exporter le champ lointain complexe pour chaque cas (deux fichiers par tirage plus les deux fichiers de l'homogène). De plus, pour calculer le champ diffusé, les fichiers de sortie de champ lointain complexe homogène et celui du défaut doivent être chargés et soustraits l'un à l'autre.

Sur la figure 4.5 est finalement représenté le temps de calcul pour les deux méthodes d'expression (4.37a) pour RECY et (4.37b) pour le calcul exact.

$$t = 42 + 0.6 * nb \quad (4.37a)$$

$$t = 20 + 20 * nb \quad (4.37b)$$

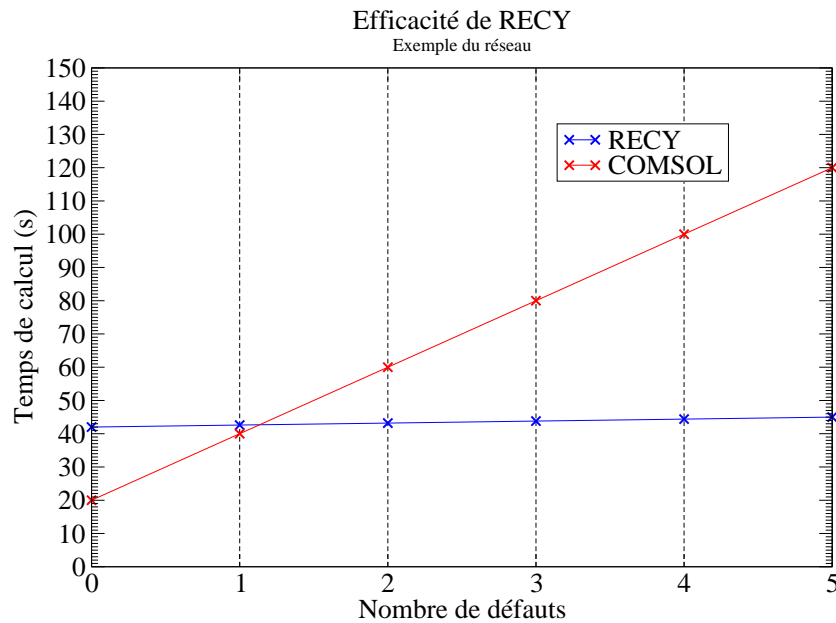


Figure 4.5 – Temps de calcul en fonction du nombre de défauts étudiés.

Il apparaît clairement que le calcul exact est beaucoup plus coûteux que la méthode RECY. Il est cependant possible d'accélérer les calculs de la méthode par éléments finis en paramétrisant les calculs. Pour un tirage de 18 défauts, par exemple, la méthode RECY met 9.640 s, sachant que la lecture du fichier a été refaite à chaque fois (ce qu'il est possible d'éviter) contre 120 s pour le calcul exact. Là encore, la méthode exacte reste plus lente que la méthode RECY. Ici, nous n'avons étudié qu'un faible nombre de défauts. Pour des études statistiques, le nombre de défauts dépasse largement les 100, la méthode RECY devient dans ce cas indispensable.

Conclusion

Comme nous l'avons vu dans l'introduction, il existe déjà de nombreuses méthodes pour l'évaluation de la diffusion par des objets diélectriques. Ce travail n'a jusqu'à présent pas été réalisé pour des objets magnétiques. L'efficacité de la méthode du premier ordre sur les cas diélectrique a motivé notre choix, conforté par les validations avec les références bibliographiques et un calcul par élément fini pour l'extension magnétique.

L'extension de cette méthode à la perméabilité nous a donné une richesse de phénomènes que nous analyserons dans la seconde partie. C'est le cas par exemple des différences de contributions au champ diffusé des fluctuations de permittivité et de perméabilité.

La méthode RECY que nous avons développée est une avancée importante car elle est extensible à des géométries différentes mais elle permet aussi de gagner du temps. En effet, elle ne nécessite qu'un seul calcul de résolution des équations de Maxwell alors que les méthodes traditionnelles ont besoin d'autant de résolutions que de défauts différents. Son application à des structures plus complexes est un point que nous avons développé dans la seconde partie.

Deuxième partie

Applications des méthodes du premier ordre à des objets magnéto-diélectriques

Introduction

L'efficacité des méthodes du premier ordre a été démontrée sur une couche magnéto-diélectrique. L'apport des fluctuations de perméabilité au champ diffusé engendre une nouvelle variété de phénomènes que nous montrerons au Chapitre 5. La forme analytique développée dans la méthode ABE nous permet d'étudier l'aptitude d'une couche de magnéto-diélectrique à diffuser par des fluctuations quelconques de permittivité et de perméabilité. Dans le cas d'une couche mince, il est même possible d'obtenir une formule rapide d'évaluation du champ diffusé.

La méthode RECY a été développée dans la partie précédente dans le but de calculer le champ diffusé par des structures complexes. Nous avons déjà démontré son efficacité sur une couche de magnéto-diélectrique. Nous vérifions à présent son efficacité sur un réseau de diffraction. Un réseau est une structure constituée d'inclusions disposées de façon périodique. Cette structure permet par le jeu des interférences constructives et destructives de former un spectre de diffraction discret. Les inclusions du réseaux peuvent être affectées de plusieurs types de défauts : position, forme, taille et propriétés. Nous étudierons au Chapitre 6 les défauts de propriétés et ceux de formes.

Pour comprendre les mécanismes du réseau, il est intéressant d'étudier en premier lieu la diffusion d'une inclusion seule. Les inclusions circulaires présentent l'avantage de posséder un modèle analytique pour le calcul du champ diffracté : la solution de Mie. Les méthodes numériques permettent en revanche d'obtenir le champ diffracté de n'importe quelle forme d'inclusion. Nous avons donc choisi d'étudier au Chapitre 7, une inclusion de taille, de forme et de propriétés variables. Nous avons ensuite étudié les inclusions dans un réseau fini de période variable. Le champ diffracté par un réseau fini présente des effets que nous démontrons être dus aux bords de l'objet. Nous avons alors considéré un réseau infini.

Le calcul du champ diffusé pour un réseau, nous amène à complexifier encore la structure. Le prolongement naturel du réseau est le cristal photonique auquel la troisième partie est entièrement consacrée. Au Chapitre 8, nous avons cherché à montrer la polyvalence de RECY, en choisissant une structure industrielle : les capteurs CMOS. Ces structures sont, à l'instar des réseaux, constituées de trois empilements répétés périodiquement laissant passer chacun l'une des trois couleurs : bleu, vert ou rouge. La diffusion peut induire un phénomène de cross-talk. Lorsque ce phénomène est présent, le capteur ne peut fonctionner correctement. En effet, dans un fonctionnement nominal, un éclairage par une lumière d'une couleur donnée ne devrait être reçu que par le capteur de cette même couleur. En présence de cross-talk, les autres capteurs recevront également du champ. Une source potentielle de cet effet est la diffusion due à des défauts dans la structure. Nous cherchons à l'aide de RECY à évaluer cette diffusion. Chaque calcul est comparé avec le calcul exact obtenu par une méthode d'éléments finis (COMSOL), afin

de valider la méthode.

Chapitre 5

Couche magnéto-diélectrique

Grâce aux trois méthodes présentées dans la première partie, nous sommes capables d'étudier la diffusion électromagnétique au premier ordre de nombreux objets.

La méthode EMFORS permet de calculer rapidement le champ diffusé par un empilement de couches inhomogènes. L'apport de la perméabilité dans les méthodes d'évaluation de champ diffusé est une contribution importante. La corrélation entre les fluctuations de permittivité et de perméabilité est un phénomène qui n'apparaît pas dans le champ diffusé au premier ordre mais qui peut se rencontrer aux ordres supérieurs ou lorsque l'intensité est observée.

La méthode ABE nous permet d'obtenir une forme analytique linéaire du champ pour une couche en fonction de la fluctuation. Cette linéarité nous permet d'étudier, indépendamment de la fluctuation, le champ diffusé pour une couche en fonction de sa permittivité et de sa perméabilité moyenne. Cette forme analytique peut devenir simple dans les cas limites de la couche mince dans l'air ou sur métal.

Comme nous l'avons évoqué dans l'introduction la méthode peut être utilisée sur des méta-matériaux. Nous regardons l'exemple d'une superlentille de permittivité $\varepsilon_r = -1$ et de perméabilité $\mu_r = -1$.

5.1 Fluctuation de perméabilité, niveau et corrélation

Pour cette étude, le cas d'une couche dans l'air est considéré. Deux valeurs de propriétés $\zeta_2 = 2$ et $\zeta_3 = 3$ sont considérés : $(\varepsilon_r = \zeta_2, \mu_r = \zeta_3)$ et $(\varepsilon_r = \zeta_3, \mu_r = \zeta_2)$. L'une des propriétés ζ est fluctuante avec une fluctuation $r(x)$ soit aléatoire $r(x) = p_{alea}(x)$ (représentée à la figure 2.3) soit sinusoïdale $r(x) = \sin(\pi x)$.

$$\zeta' = \zeta(1 + 0.2r(x))$$

Nous obtenons alors les huit cas possibles représentés dans les figures 5.1. Dans les cas où ζ_2 fluctue (graphiques de gauche) la fluctuation de permittivité est représentée par la courbe **bleue** et celle de perméabilité en **rouge**. Dans le cas où ζ_3 fluctue (graphiques de droite) la fluctuation de permittivité est représentée par la courbe **rouge** et celle de perméabilité en **bleue**.

Le niveau d'intensité diffusée dépend du niveau de la valeur moyenne de la propriété fluctuante. Aussi, l'intensité diffusée par une fluctuation de ζ_2 est inférieure à une fluctuation de ζ_3 (comparer les graphiques de gauche avec ceux de droite).

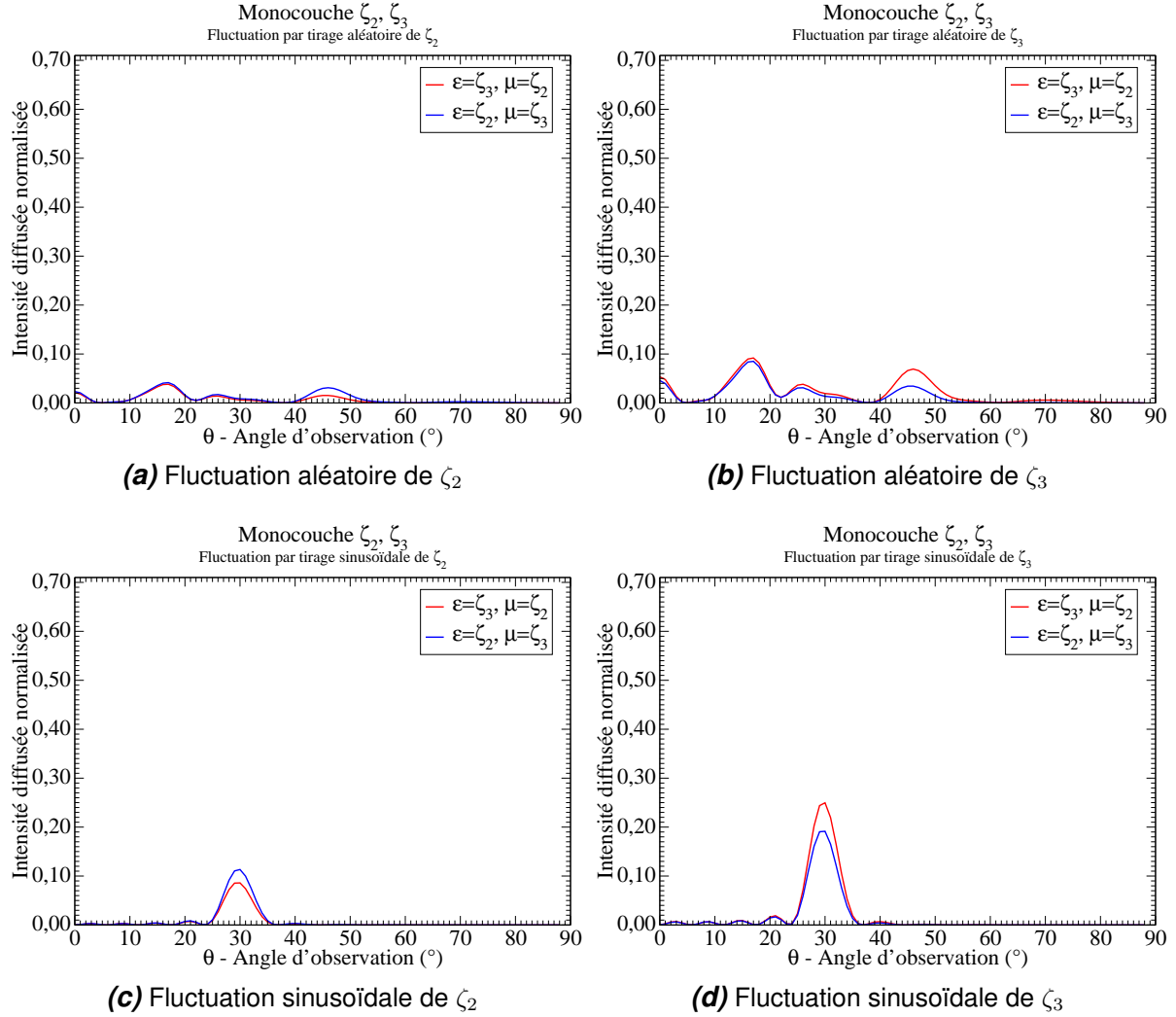


Figure 5.1 – Fluctuation aléatoire ou sinusoïdale d'une seule propriété de la couche (ζ_2, ζ_3).

La nature de la fluctuation joue sur le niveau de l'intensité diffusée. En effet, l'intensité diffusée par une fluctuation de perméabilité est légèrement inférieure à celle de permittivité pour une même valeur de propriétés homogènes ($\varepsilon_r = \mu_r$) et une même fluctuation (comparer les courbes dans chaque graphique).

La forme de la fluctuation se retrouve dans l'intensité diffusée. Le pic de diffusion à 30° est caractéristique de la fluctuation sinusoïdale (graphique du bas). La fluctuation aléatoire $p_{alea}(x)$ présente des pic à 15° et 45° (graphique du haut).

Maintenant, les deux propriétés des couches ($\varepsilon_r = \zeta_2, \mu_r = \zeta_3$) et ($\varepsilon_r = \zeta_3, \mu_r = \zeta_2$) vont varier en même temps avec les fluctuations sinusoïdale et aléatoire précédentes. Deux cas seront alors possibles, soit elles varient avec la même fluctuation soit avec des fluctuations différentes. Il y aura alors un cas où les fluctuations sont corrélées représentées aux figures 5.2 et l'autre où elles sont non-corrélées représentées aux figures 5.3.

La fluctuation conjointe des deux propriétés n'est pas égale à la somme des fluctuations indépendantes des figures 5.1 (prendre les courbes de la même couleur, a ou c puis b ou d pour former la somme). Il existe en effet un facteur de corrélation entre les fluctuations,

présent dans l'expression de l'intensité diffusée (d'ordre 2).

La corrélation des fluctuations semble avoir exacerbée l'intensité diffusée par les fluctuations conjointes des deux propriétés car le niveau de diffusion est bien plus grand que celui d'une fluctuation seule.

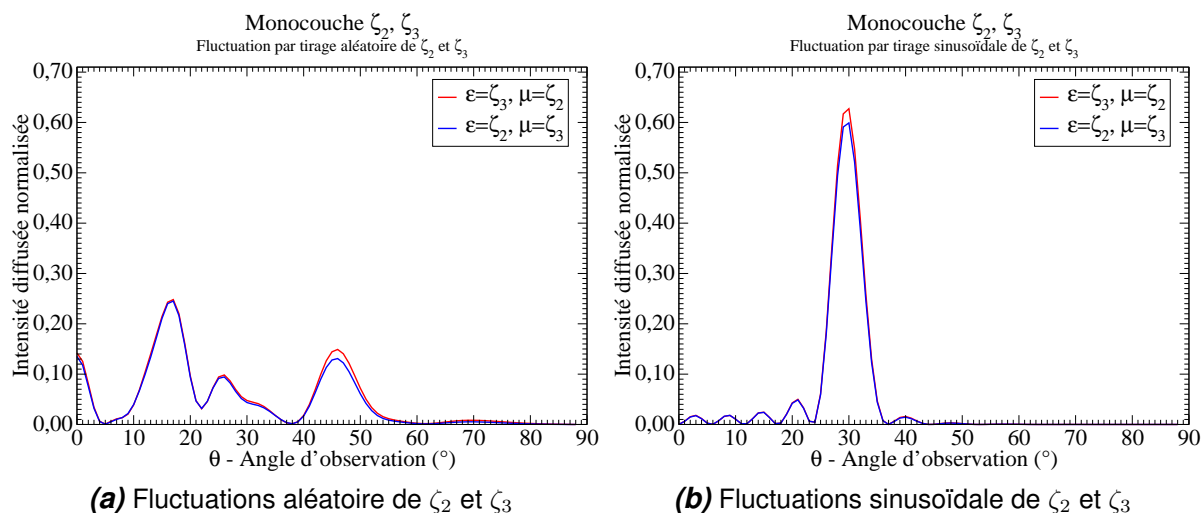


Figure 5.2 – Fluctuations corrélées des propriétés de la couche (ζ_2, ζ_3).

Au contraire dans le cas où les fluctuations sont différentes, la diffusion est légèrement supérieure à celle d'une fluctuation seule. La forme des deux fluctuations seules est retrouvées dans l'intensité diffusée par les fluctuations conjointes. Les pics de diffusion de la fluctuation aléatoire $p_{alea}(x)$ à 15° et 45° se retrouvent dans l'intensité diffusée des deux fluctuations en plus de celle du sinus à 30°. Le niveau du pic indique que la valeur moyenne de la propriété dont la forme de la fluctuation possède ce pic caractéristique est plus grande ou petite que l'autre propriété. Ainsi le pic du sinus à 30° est plus important pour la propriété ζ_3 que celui de ζ_2 . De même avec les pics la fluctuation aléatoire.

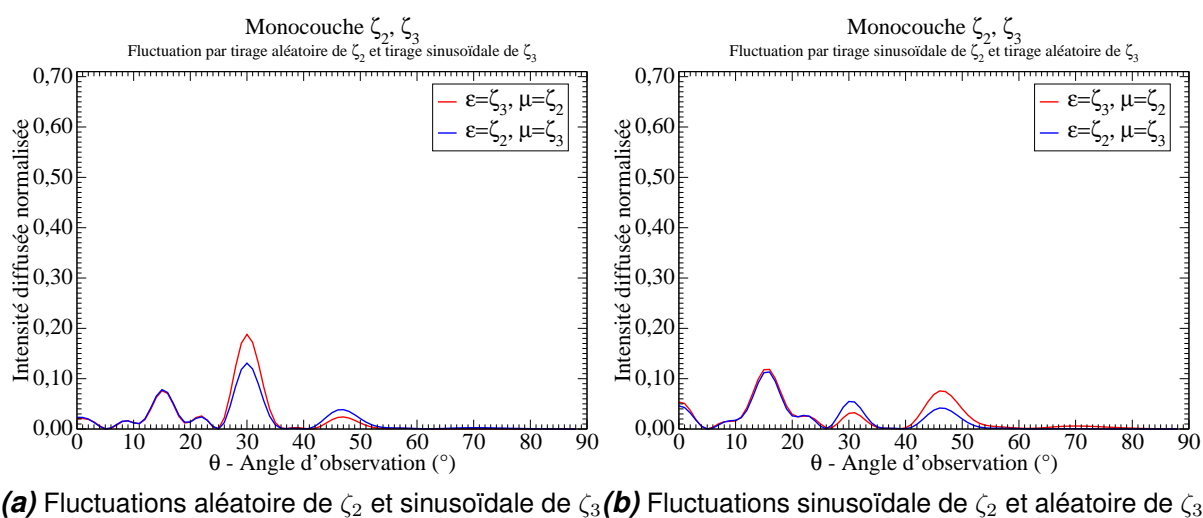


Figure 5.3 – Fluctuations non-corrélées des propriétés de la couche (ζ_2, ζ_3).

5.2 Solution analytique pour la diffusion d'une couche magnéto-diélectrique

La démarche analytique de la méthode ABE nous permet à l'aide de Maple[®] de traiter le cas d'une couche dans l'air ou sur métal (cf. Figure 2.1). Il est éclairé par une onde plane unitaire polarisé en $E_y \neq 0$ d'angle d'incidence $i_0 = 0$ et $\psi = 0$, et l'observation se fait dans la même polarisation pour $\phi = 0$ et en faisant varier θ . Comme nous l'avons vu le champ diffusé est alors une fonction linéaire de p (fluctuation de ε) et de q (fluctuation de μ).

$$E_y^d(\varepsilon_r, \mu_r, x, \theta, \lambda) = B_\varepsilon(\varepsilon_r, \mu_r, x, \theta)p(\lambda, \theta) + B_\mu(\varepsilon_r, \mu_r, x, \theta)q(\lambda, \theta) \quad (5.1)$$

En examinant la forme analytique obtenu à l'aide de Maple[®], il apparaît que le coefficient B_μ est différent du coefficient B_ε . Ces deux coefficients peuvent se comprendre comme :

- B_ε est le potentiel de diffusion au premier ordre d'une couche par une fluctuation quelconque de permittivité,
- B_μ est le potentiel de diffusion au premier ordre d'une couche par une fluctuation quelconque de perméabilité.

L'intensité diffusée (cf. Annexe D) d'une couche est donnée par :

$$I^d = \beta_\varepsilon \gamma_\varepsilon + \beta_\mu \gamma_\mu + \beta_{\varepsilon\mu} \Re(\gamma_{\varepsilon\mu}) \quad (5.2)$$

Les coefficients β_ε et β_μ sont directement liés à B_ε et B_μ par les expressions :

$$\beta_\varepsilon = k_0^2 |B_\varepsilon|^2 \cos^2 \theta \quad (5.3a)$$

$$\beta_\mu = k_0^2 |B_\mu|^2 \cos^2 \theta \quad (5.3b)$$

Dans chaque cas, $\beta_\varepsilon(\varepsilon, \mu)$ et $\beta_\mu(\varepsilon, \mu)$ sont représentés pour des permittivités et des perméabilités réelles variants de 0 à 10. La représentation des β sera sous la forme de $\log(|\beta|)$.

5.3 Influence des permittivité et perméabilité sur la diffusion

Nous considérons une couche d'épaisseur $e = 0.1\lambda$ à la longueur d'onde $\lambda = 0.03$ m successivement dans l'air et sur un métal parfait.

5.3.1 Couche dans l'air

Nous obtenons les figures 5.4 pour un angle d'observation $\theta = 40^\circ$ et les figures 5.5 pour $\theta = 60^\circ$ dans les deux polarisations.

On peut tout d'abord noter que les coefficients β_ε et β_μ sont différents. Ce qui indique qu'une fluctuation de permittivité ne signe pas de la même façon qu'une fluctuation de perméabilité, ce que nous avons déjà remarqué au Chapitre 2. L'apport de cette contribution magnétique au champ diffusé est donc une avancée significative.

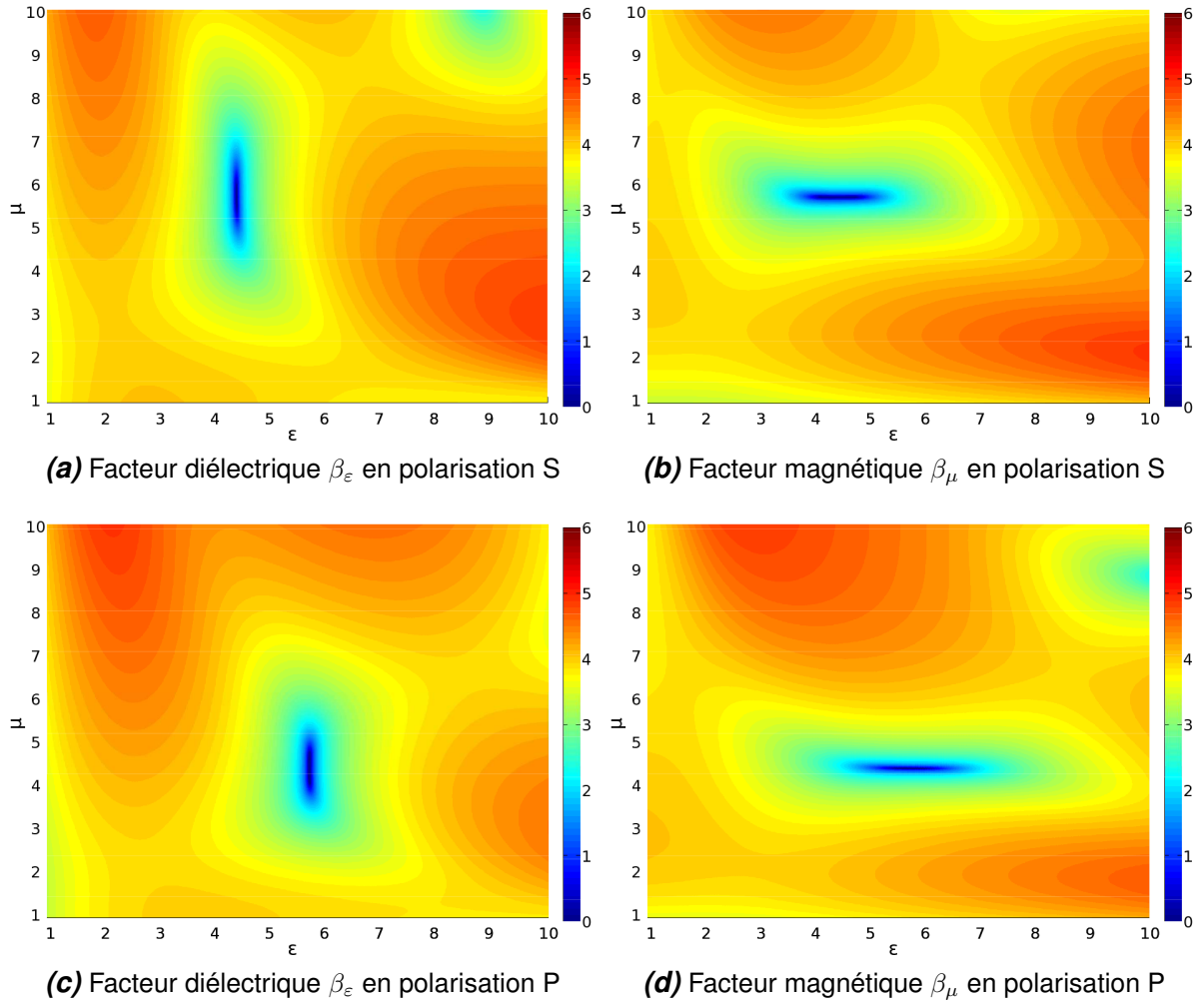


Figure 5.4 – Facteur β dans l'air, angle d'observation $\theta = 40^\circ$.

Il est également important de noter que le coefficient β peut varier sur 6 ordres de grandeur : ainsi il existe des valeurs de permittivités et de perméabilités pour lesquelles la diffusion est très importante et d'autres où elle est moindre. L'utilisation de ces cartes nous apporte donc des informations très importantes pour la spécification de l'homogénéité à apporter lors de la réalisation d'un matériau.

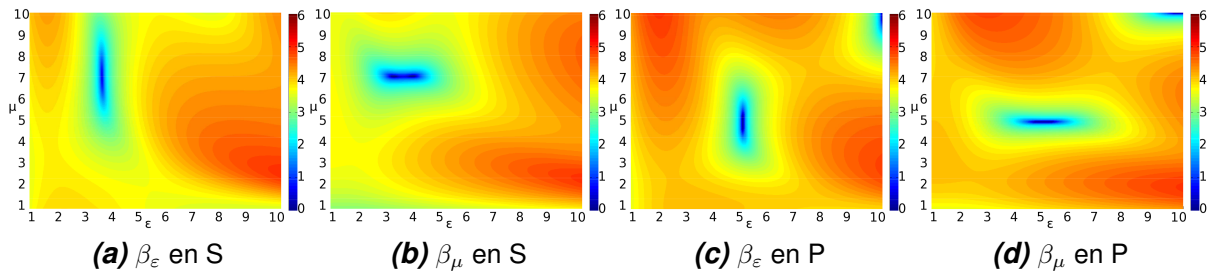


Figure 5.5 – Facteur β dans l'air, angle d'observation $\theta = 60^\circ$.

Bien entendu la position des extrema de diffusion dépend de l'angle d'observation θ choisi, ainsi qu'on peut le voir en comparant les figure 5.4 et 5.5.

Nous remarquons également qu'il n'est pas possible d'obtenir par une quelconque symétrie une carte à partir d'une autre. Comme nous l'avons déjà souligné (cf. Section 1.4.1) la dualité des équations de Maxwell n'induit pas d'équivalence entre les solutions.

5.3.2 Couche sur métal

Nous obtenons les figures 5.6 pour un angle d'observation $\theta = 40^\circ$. Les cartes pour une polarisation et des angles différents ne sont pas représentées car elles diffèrent très peu de la figure 5.6.

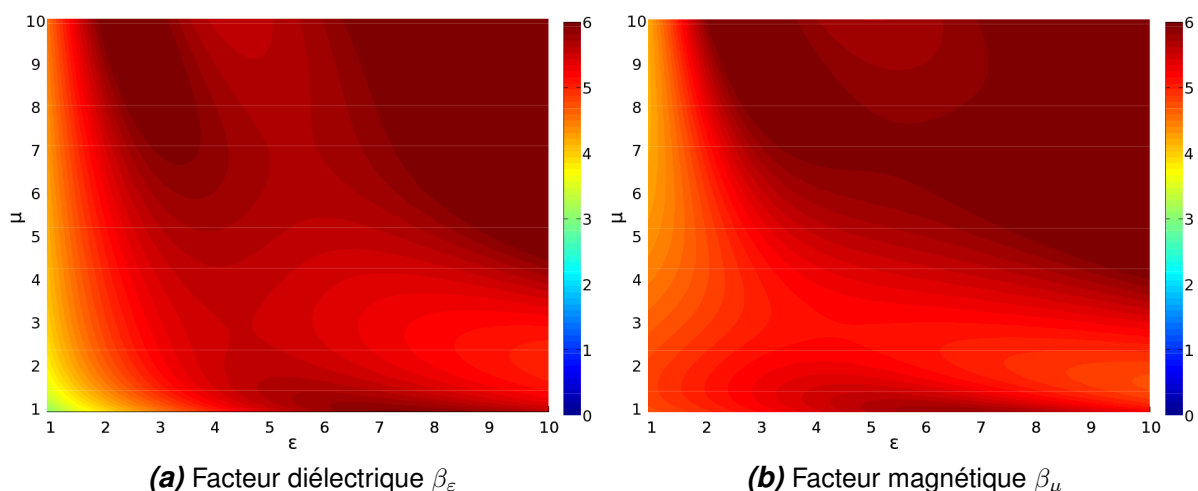


Figure 5.6 – Facteur β sur métal en polarisation S, angle d'observation $\theta = 40^\circ$.

Nous observons que le plan métallique a considérablement augmenté le potentiel de diffusion de la couche. Nous remarquons cependant que β_ϵ et β_μ sont là encore différents. Nous n'observons cependant pas de zone particulière où le champ diffusé serait significativement réduit comme dans l'air. Néanmoins, à des échelles moindres (entre 4 et 6), il existe des zones de plus faible diffusion.

5.4 Approximation de la couche mince

En posant $x = e/\lambda$ le rapport entre l'épaisseur et la longueur d'onde incidente, et dans l'hypothèse d'une couche mince par rapport à la longueur d'onde (valable pour $x \leq 0.01$), il est possible de faire un développement limité en x . En se limitant au premier ordre non-nul en x , nous obtenons une forme simple des coefficients B_ϵ et B_μ . Nous afficherons les coefficients exactes et celui au premier ordre non-nul en x , ainsi que la différence relative entre les deux.

5.4.1 Dans l'air

Le coefficient B_ϵ dans l'air s'écrit à l'ordre 1 (5.4).

$$B_\varepsilon = \imath\pi \frac{1}{\cos\theta} \varepsilon_r x \quad (5.4)$$

Le coefficient B_μ dans l'air s'écrit à l'ordre 1 (5.5).

$$B_\mu = -\imath\pi\mu_r x \quad (5.5)$$

Nous obtenons par exemple à $\lambda = 0.03$ m, $e = 0.0003$ (soit $x = 0.01$) et un angle d'observation $\theta = 40^\circ$, les figures 5.7 pour la solution exacte et le développement limité en x pour les deux coefficients.

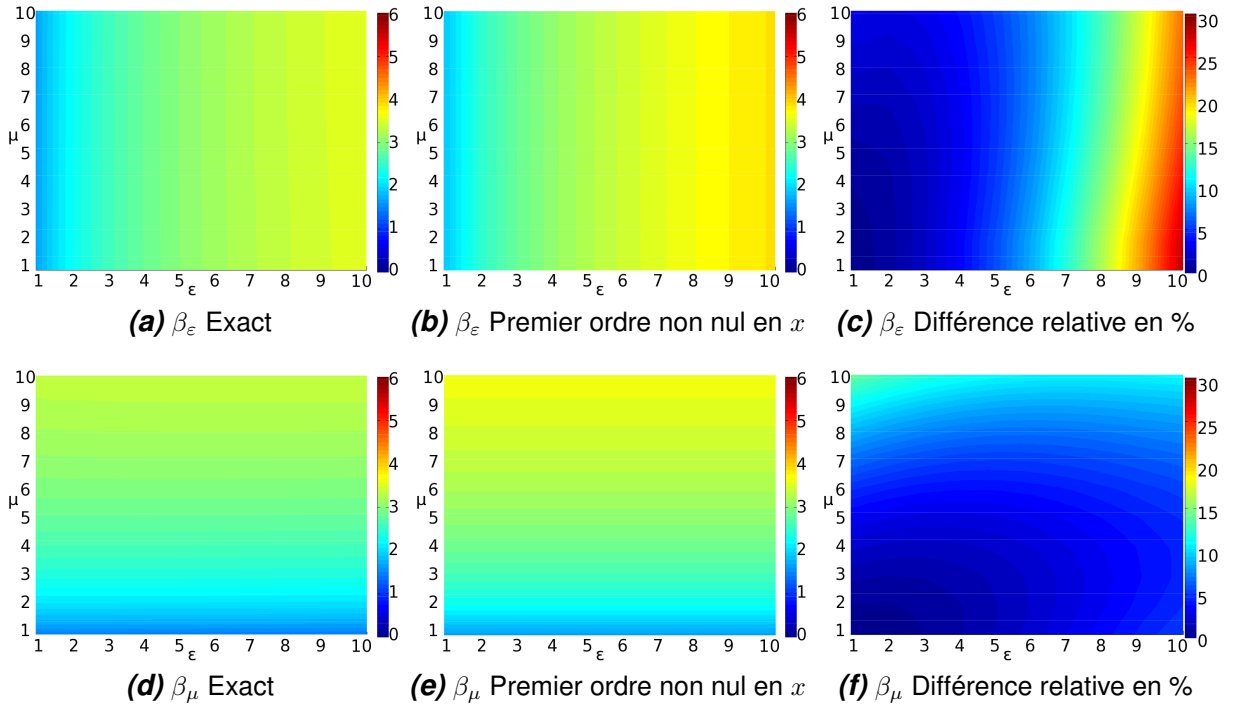


Figure 5.7 – Comparaison des coefficients β au premier ordre exact et au premier ordre non-nul en x dans l'air.

Nous constatons que l'erreur ne dépasse pas les 30% ce qui est fort acceptable comme approximation. De plus, β_ε et β_μ sont pratiquement symétriques au $\cos\theta$ près.

En comparant les figure 5.7 avec celles obtenues aux figures 5.4, on remarque que le champ diffusé est très diminué, ce qui s'explique par la diminution de l'épaisseur de la couche. En outre, les zones de faibles diffusion observées dans le cas de la couche plus épaisse ont disparu. Le champ diffusé augmente linéairement avec la permittivité pour la diffusion diélectrique et linéairement avec la perméabilité pour la diffusion magnétique. Cette évolution linéaire est confirmée par les formes analytiques du développement limité en x .

5.4.2 Sur métal

Le coefficient B_ϵ sur métal s'écrit à l'ordre 3 (5.6). L'ordre 3 est le premier ordre non-nul.

$$B_\epsilon = -i \frac{16\pi^3}{3} \epsilon_r \mu_r^2 x^3 \quad (5.6)$$

Le coefficient B_μ sur métal s'écrit à l'ordre 1 (5.7).

$$B_\mu = -4i\pi\mu_r x \quad (5.7)$$

Pour $\lambda = 0.03$ m, $e = 0.0003$ (soit $x = 0.01$) et un angle d'observation $\theta = 40^\circ$, nous obtenons les figures 5.8 pour la solution exact et le développement limité en x pour les deux coefficients.

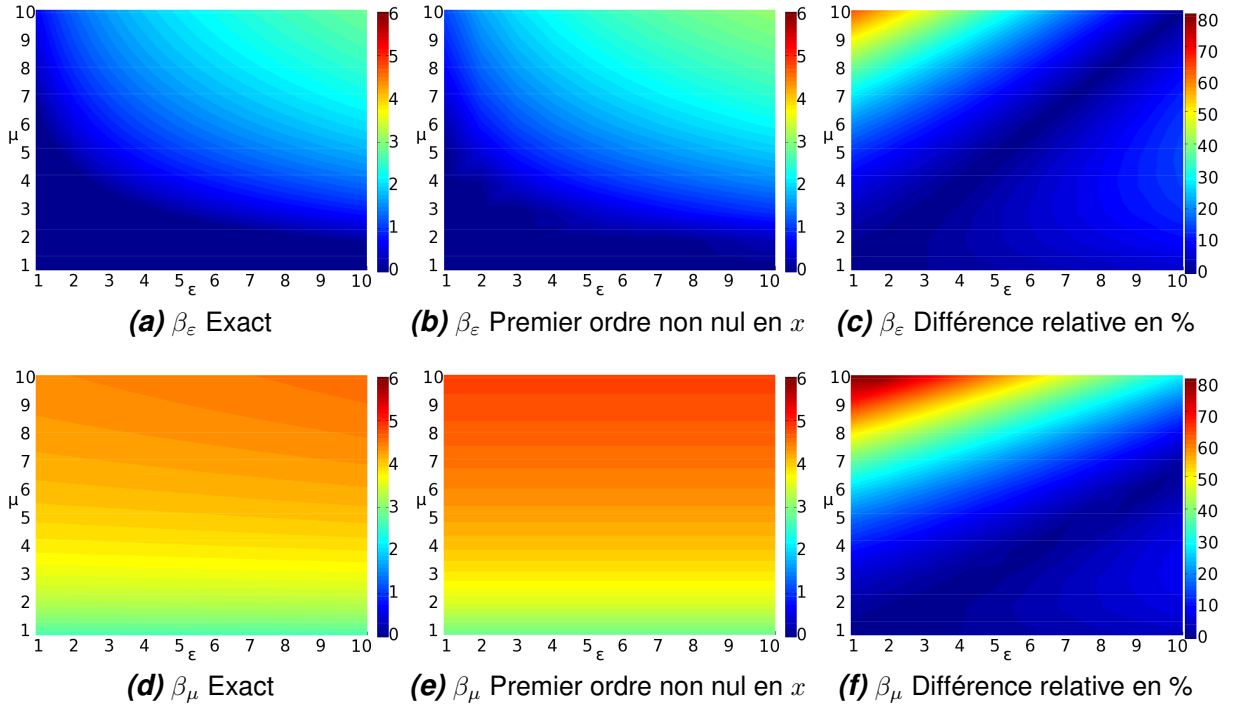


Figure 5.8 – Comparaison des coefficients β au premier ordre exact et au premier ordre non-nul en x sur métal.

L'erreur est plus importante dans cette configuration jusqu'à 80% mais cette valeur est atteinte dans une zone très localisée. L'approximation reste donc globalement très acceptable. Le coefficient B_ϵ est bien moins important que le coefficient B_μ . En effet, le coefficient B_ϵ est une fonction de x d'ordre 3 uniquement. La valeur de x étant petite (hypothèse du développement limité), le coefficient B_ϵ est toujours inférieur à B_μ qui est d'ordre 1 en x .

Comme dans l'air, la diminution de l'épaisseur de la couche a réduit le champ diffusé, et a régularisé ses variations en fonction des paramètres ϵ_r et μ_r . La présence du plan conducteur sous la plaque a cependant exacerbé l'impact des défauts de perméabilité

(comparer les figures 5.7d et 5.8d) et atténué celui des défauts de permittivité (comparer les figures 5.7a et 5.8a). Ce phénomène n'avait pas été observé pour les défauts de permittivités de la couche épaisse.

5.5 Exemple de méta-matériau : la superlentille

Le terme de méta-matériau a été introduit par Pendry [3] en 1999. Il désigne un matériau artificiel structuré à une échelle inférieure à la longueur d'onde, afin d'obtenir des propriétés singulières autrement dit des propriétés qui ne sont pas accessibles à partir de matériaux homogènes. Le matériau peut être considéré comme un milieu moyen décrit par une permittivité et une perméabilité effectives. Même si les processus d'homogénéisation continuent de susciter des débats, quant à leur condition d'application notamment, on observe un consensus sur l'intérêt potentiel d'envisager des méta-matériaux à permittivité et perméabilité effectives positives, nulles ou négatives. Cette dernière possibilité, imaginée dès 1962 par Veselago[51], a permis d'envisager de nouvelles applications. L'idée de superlentille, introduite par Pendry [4] en 2000, s'inscrit dans ce contexte.

5.5.1 Principe de la superlentille

Le concept de superlentille [5, 6, 7] repose sur la possibilité de focaliser à partir d'un méta-matériau qui présente un indice de réfraction négatif. On observe ainsi dans un milieu d'indice négatif, une réfraction inversée comme représenté sur la figure 5.9. Le vecteur d'onde dans la superlentille est négatif.

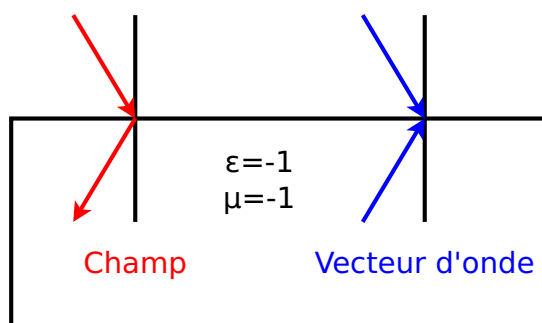


Figure 5.9 – Représentation des champs et du vecteur d'onde à la traversée de la superlentille.

En appliquant les relation de Snell-Descartes, Veselago a montré qu'un matériau d'indice négatif se comporte comme une lentille sphérique de verre mais sans déformation, l'image est reconstruite à l'identique.

5.5.2 Défaut dans une superlentille

Les valeurs idéales de permittivité et de perméabilité d'une superlentille sont $\epsilon_r = -1$ et $\mu_r = -1$. Nous calculons les coefficients β , potentiel de diffusion de la superlentille pour

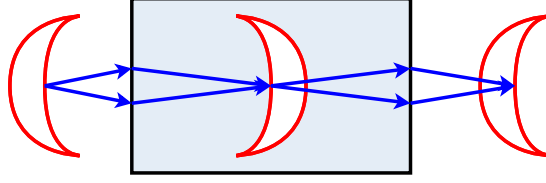


Figure 5.10 – Représentation du principe de la superlentille.

une incidence normale ($i_0 = 0^\circ$), une longueur d'onde de $\lambda = 500$ nm en polarisation S et une épaisseur de $e = \lambda/10$. Les résultats sont présentés aux figure 5.11.

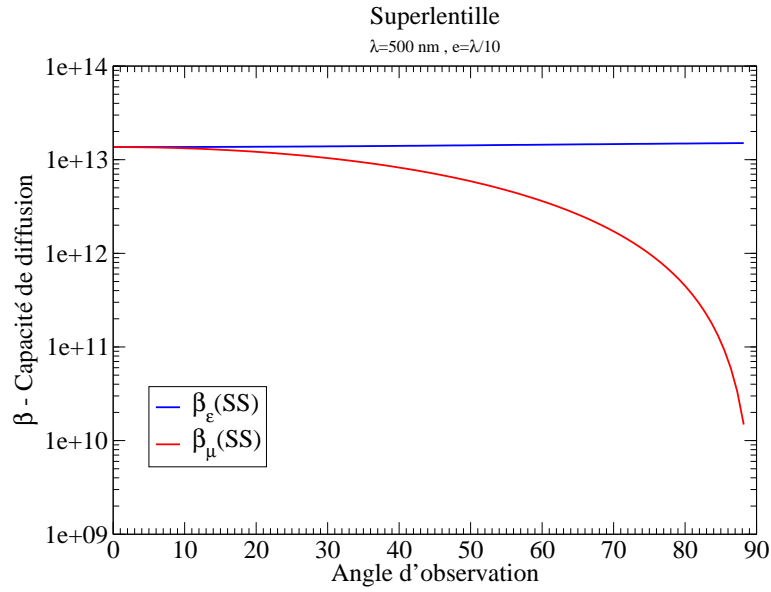


Figure 5.11 – Facteur β pour une superlentille à $\lambda = 500$ nm et d'épaisseur $e = \lambda/10$. L'amplitude de l'intensité de diffusion sera de l'ordre de grandeur de $\beta \cdot \lambda^2$ au maximum.

Nous observons compte tenu de l'ordre de grandeur des fluctuations ($< \lambda$) que l'intensité diffusée sera faible 10^{-5} . Nous n'irons pas plus loin dans cette étude qui illustre simplement sur un cas classique l'intérêt d'avoir un outil d'évaluation de la diffusion de matériau magnéto-diélectriques.

Une autre application importante des méta-matériaux est la cape d'invisibilité où les problèmes de diffusions liés aux défauts de réalisation seront particulièrement cruciaux.

Chapitre 6

Réseaux diélectriques

La méthode RECY nous permet de calculer la diffusion électromagnétique de n'importe quel objet défectueux dès lors qu'il est possible d'en calculer le champ dans l'objet sans défaut (champ idéal). Ce calcul de champ idéal peut être analytique ou numérique.

Dans le chapitre 4, la méthode RECY a été appliquée sur le cas simple d'une couche en utilisant le calcul analytique du champ dans l'objet idéal.

L'étude de la diffusion électromagnétique par un réseau contenant une ou plusieurs inclusions défectueuses par leurs tailles ou leur permittivité/perméabilité est un premier pas vers des milieux structurés plus complexes.

6.1 Réseau d'étude

Le réseau est une structure périodique constitué d'inclusions séparées par une période fixe p_r (cf. Figure 6.1).

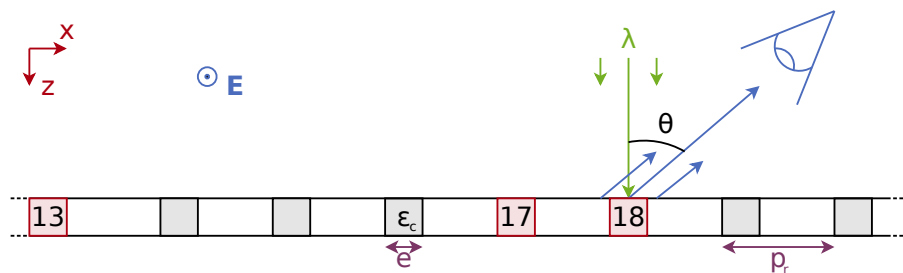


Figure 6.1 – Réseau considéré et son système de coordonnées. Position des inclusions défectueuses (13,17,18).

Par la méthode RECY, nous pouvons calculer en utilisant le champ électrique (ou magnétique) dans le réseau sans défaut, le champ diffusé par une (ou plusieurs) inclusion défectueuse ou même un défaut dans la matrice englobant les inclusions qui constituent le réseau. Ce calcul de champ dans le réseau homogène a été réalisé en utilisant un code d'élément fini COMSOL®.

La périodicité du réseau nous permet de calculer le champ dans une seule période pour calculer le champ diffusé. Néanmoins, dans ce cas, le champ diffusé obtenu sera celui d'un réseau infini. Pour valider la pertinence de l'utilisation de RECY vis à vis d'un tel milieu structuré, nous comparerons le champ diffusé obtenu par RECY à celui calculé directement (par un code d'éléments finis) sur le réseau fini inhomogène. Nous pouvons donc aussi bien utiliser le champ de la structure finie pour appliquer la réciprocité. Nous distinguerons alors, notre méthode RECY pour le cas d'une structure finie et RECYp dans le cas du calcul périodique du champ du réseau sans défaut (idéal).

Nous considérons comme exemple d'application un réseau de 35 inclusions cylindriques carrées de taille $e = 0.03\lambda$, de période $p_r = 0.09\lambda$, de permittivité ε_r et de perméabilité μ_r à la longueur d'onde $\lambda = 1$ m, éclairé par une onde plane en incidence normale ($\theta = 0^\circ$) en polarisation S (ou TE, soit $E_x = E_z = 0$, $E_y \neq 0$) représenté sur la figure 6.1.

Nous considérerons plusieurs types et positions de défauts possibles et dans un premier temps nous n'utiliserons pas RECYp.

6.2 Défaut unique de propriété de l'inclusion 18

Nous considérons comme défaut une fluctuation de ± 10 à 90% de la permittivité de l'inclusion 18, situé au milieu du réseau. Trois valeurs de permittivités seront envisagées pour les inclusions $\varepsilon_r = 1.3$, $\varepsilon_r = 7$ et $\varepsilon_r = 15$. La figure 6.2 présente la norme du champ diffusé normalisé dans le cas où $\varepsilon_r = 7$. Chaque couleur correspond à une amplitude de fluctuation.

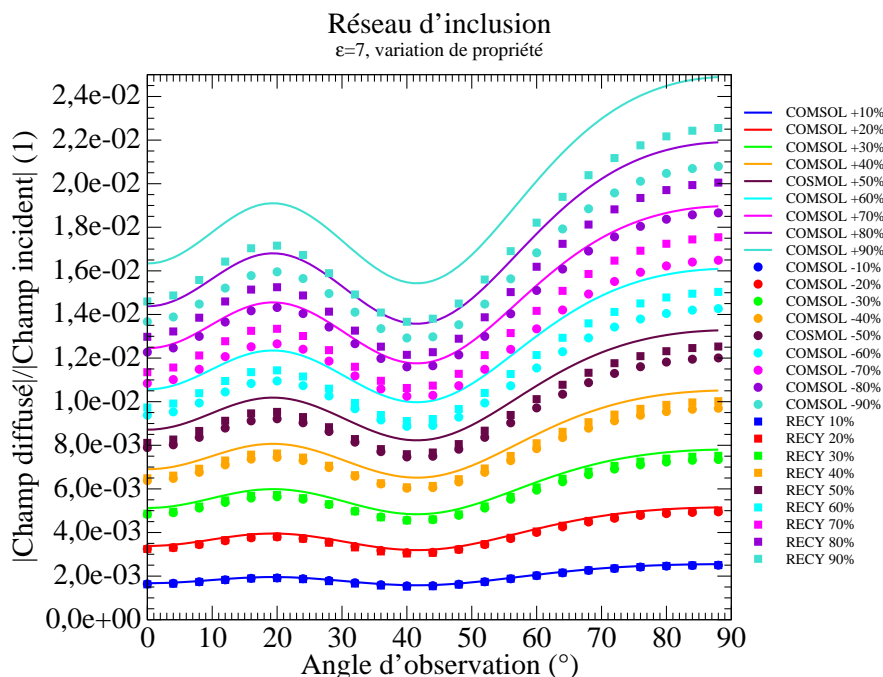


Figure 6.2 – Diffusion par un réseau d'inclusions de permittivité $\varepsilon_r = 7$ dont l'inclusion 18 présente une permittivité supérieure/inférieure de ± 10 à 90% par rapport aux autres inclusions.

Plusieurs points importants se dégagent de ces courbes. Tout d'abord on observe

globalement une bonne estimation de la diffusion par la méthode RECY. Deuxièmement le champ diffusé semble augmenter linéairement avec le pourcentage de fluctuation. On remarque aussi, qu'une diminution de permittivité de l'inclusion défectueuse engendre une moindre diffusion qu'une augmentation de la permittivité à pourcentage égal. Enfin, nous constatons que la méthode RECY ne peut pas distinguer une diminution d'une augmentation de la permittivité. En effet, le champ diffusé est donné par l'équation (4.16). La seule différence entre une augmentation et une diminution de la permittivité est le signe de la fluctuation. Ce signe disparaît lorsque l'on trace la norme du champ diffusé. On constate ainsi que le champ diffusé n'est pas symétrique par rapport à ce type de fluctuation.

Défaut	$\varepsilon = 1.3$	$\varepsilon = 7$	$\varepsilon = 15$	Défaut	$\varepsilon = 1.3$	$\varepsilon = 7$	$\varepsilon = 15$
-10% Prop	2.14%	0.78%	2.25%	+10% Prop	2.50%	2.60%	2.95%
-20% Prop	1.95%	0.85%	3.20%	+20% Prop	2.69%	3.57%	4.81%
-30% Prop	1.77%	1.43%	4.86%	+30% Prop	2.87%	4.54%	6.64%
-40% Prop	1.58%	2.35%	6.79%	+40% Prop	3.05%	5.50%	8.43%
-50% Prop	1.40%	3.35%	8.82%	+50% Prop	3.24%	6.46%	10.18%
-60% Prop	1.22%	4.36%	10.86%	+60% Prop	3.42%	7.41%	11.89%
-70% Prop	1.03%	5.38%	12.93%	+70% Prop	3.60%	8.35%	13.56%
-80% Prop	0.85%	6.40%	15.02%	+80% Prop	3.78%	9.28%	15.18%
-90% Prop	0.73%	7.43%	17.12%	+90% Prop	3.97%	10.21%	16.76%

Tableau 6.1 – Erreur relative de RECY pour un défaut de propriété de $x\%$ de l'inclusion 18.

Pour quantifier l'erreur commise par la méthode RECY, nous avons calculé l'écart relatif entre le calcul COMSOL et celui de RECY pour toutes les permittivités. Le tableau 6.1 confirme que RECY fonctionne relativement bien : on peut aller jusqu'à des fluctuations de 90% et des permittivités assez grandes (ici $\varepsilon_r = 15$) sans que l'erreur ne dépasse les 18%.

Maintenant que nous avons validé la méthode RECY pour des fluctuations de permittivités, nous allons considérer cette fois une fluctuation du volume d'une inclusion.

6.3 Défaut unique de géométrie de l'inclusion 18

Comme nous l'avons déjà fait remarquer RECY est une méthode conçue pour calculer le champ diffusé par des fluctuations de permittivité. Cependant, une faible fluctuation de volume peut être assimilée à une fluctuation de permittivité (Homogénéisation, cf. Annexe F). En effet, si le volume du carré augmente/diminue de $x\%$ (x négatif pour une diminution), la fluctuation de permittivité de l'inclusion initiale peut être obtenue en estimant la permittivité équivalente de l'inclusion réduite sur le volume initial V_i de l'inclusion (cf. Figure 6.3).

L'inclusion réduite de permittivité ε_c a un volume $V_r = V_i(1 + x)$. Pour obtenir, un volume plus grand mais de même densité volumique, nous devons faire une simple moyenne géométrique. Nous devons donc trouver la permittivité ε_e équivalente que doit posséder le volume initial V_i pour satisfaire l'équation (6.1), les inclusions étant entourées

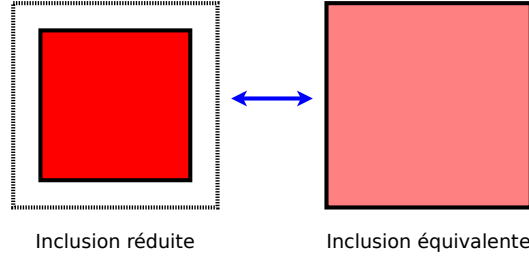


Figure 6.3 – Illustration de l’homogénéisation d’une inclusion réduite en une inclusion équivalente. Le même principe peut être utilisé dans l’autre sens pour une inclusion plus grande que les autres inclusions.

d’air ($\varepsilon_r = 1$).

$$V_i \varepsilon_e = V_r \varepsilon_c + (V_i - V_r) \quad (6.1)$$

En remplaçant V_r , nous obtenons :

$$V_i \varepsilon_e = V_i(1+x)\varepsilon_c + (V_i - V_i(1+x))$$

$$\varepsilon_e = (1+x)\varepsilon_c + (1 - (1+x))$$

$$\varepsilon_e = (1+x)\varepsilon_c - x$$

Ce qui correspond à une fluctuation de x_p donné par (6.2).

$$x_p = \frac{(1+x)\varepsilon_c - x}{\varepsilon_c} - 1 \quad (6.2)$$

Comme dans le cas de la fluctuation de propriété (Section 6.2), nous allons étudier le cas où l’inclusion 18 est défectueuse, pour les valeurs de permittivités des inclusions du réseau $\varepsilon_r = 1.3$, $\varepsilon_r = 7$ et $\varepsilon_r = 15$. Nous obtenons alors pour la permittivité $\varepsilon_r = 7$, l’ensemble des courbes représenté sur la figure 6.4.

Plusieurs remarques peuvent être faites. Tout d’abord, comme pour le défaut de propriété, on observe globalement une bonne estimation de la diffusion par la méthode RECY. Ce qui montre également que l’équivalence entre la fluctuation de volume et celle de permittivité est bonne. La diffusion pour les pourcentages importants est plus faible que dans le cas de la fluctuation de permittivité. Ce qui se comprend aisément étant donné la loi d’équivalence que nous avons utilisé. En effet, la fluctuation de permittivité n’est pas la même à pourcentage identique entre la fluctuation de permittivité et celle de volume.

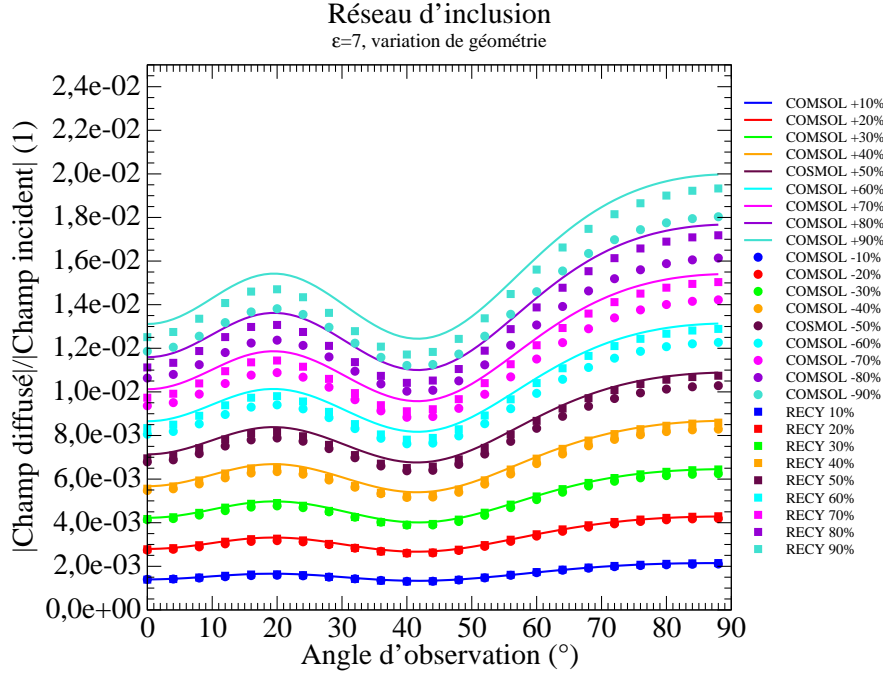


Figure 6.4 – Diffusion par un réseau d'inclusion de permittivité $\varepsilon_r = 7$ dont l'inclusion 18 a un volume supérieur/inférieur de ± 10 à 90% par rapport aux autres inclusions.

Défaut	$\varepsilon = 1.3$	$\varepsilon = 7$	$\varepsilon = 15$	Défaut	$\varepsilon = 1.3$	$\varepsilon = 7$	$\varepsilon = 15$
-10% Géo	3.70%	1.46%	5.02%	+10% Géo	2.22%	1.15%	3.32%
-20% Géo	2.44%	1.92%	5.42%	+20% Géo	1.87%	1.04%	2.34%
-30% Géo	2.41%	2.13%	6.62%	+30% Géo	2.02%	1.29%	2.00%
-40% Géo	2.03%	2.60%	7.97%	+40% Géo	1.88%	2.00%	1.92%
-50% Géo	2.00%	3.43%	9.60%	+50% Géo	2.20%	2.39%	2.25%
-60% Géo	1.99%	4.10%	11.03%	+60% Géo	2.16%	3.05%	2.65%
-70% Géo	1.91%	4.77%	12.61%	+70% Géo	2.21%	3.46%	3.30%
-80% Géo	1.98%	5.44%	14.24%	+80% Géo	2.10%	3.88%	4.03%
-90% Géo	1.94%	6.19%	16.02%	+90% Géo	2.22%	4.38%	4.68%

Tableau 6.2 – Erreur relative de RECY pour un défaut de géométrie de $x\%$ de l'inclusion 18.

Pour estimer l'erreur commise par la méthode RECY, nous avons calculé l'écart relatif entre le calcul COMSOL et celui de RECY pour toutes les permittivités. Nous observons que RECY est relativement précise, et peut même aller à des fluctuations de 90% et des permittivités assez grandes (ici $\varepsilon_r = 15$) sans que l'erreur ne dépasse les 17%.

Nous avons donc montré que RECY était très efficace pour évaluer le champ diffusé par un réseau possédant une inclusion défectueuse. Qu'en est-il si plusieurs inclusions présentent des défauts et quel est l'impact des positions respectives entre les défauts? Pour obtenir une réponse nous avons étudié le cas d'un réseau présentant deux inclusions défectueuses.

6.4 Cas de deux défauts de propriétés et de géométrie

Nous considérons deux défauts dans deux configurations :

- une configuration où les défauts sont proches, inclusions 17 et 18 (déphasage d'une période $n_p = 1$).
- une configuration où les défauts sont éloignés, inclusions 13 et 18 (déphasage de cinq périodes $n_p = 5$).

Nous garderons à titre indicatif comme référence le cas du défaut unique (inclusion 18) étudié dans la section 6.2.

6.4.1 Défauts de propriété

RECY nous donne pour une permittivité $\varepsilon_r = 7$, le champ diffusé par les deux défauts de propriétés dans les deux configurations et pour divers pourcentages (cf. Figure 6.5).

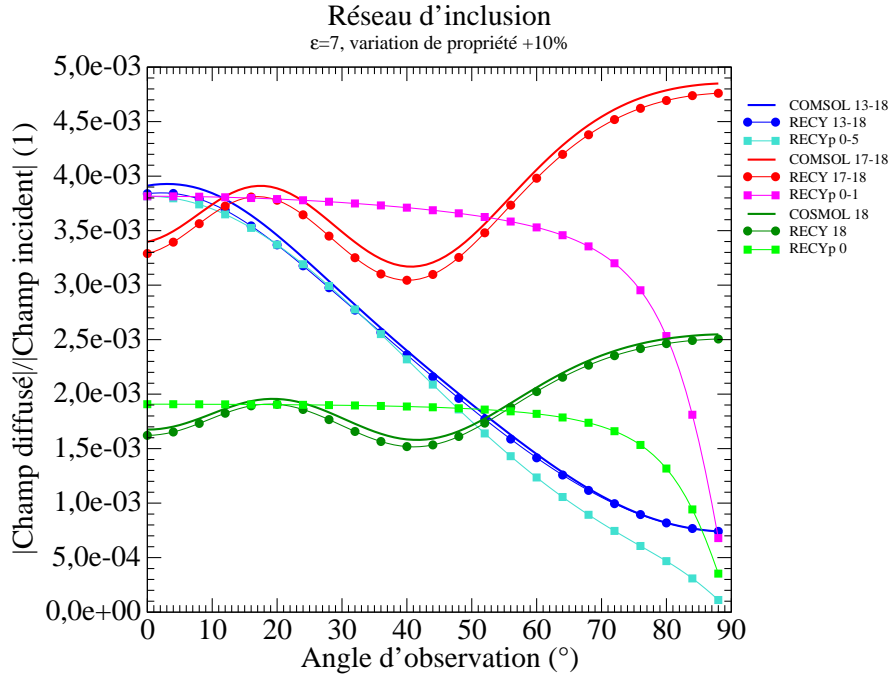


Figure 6.5 – Diffusion par un réseau d'inclusion de permittivité $\varepsilon_r = 7$ dont l'inclusion 18, 13 – 18, ou 17 – 18 ont un volume supérieur de 10%

L'erreur relative par rapport à la solution exacte de COMSOL est donnée dans le tableau 6.3. Nous observons que les erreurs sont similaires au cas avec un seul défaut. Le champ diffusé pour un pourcentage de +10% des trois configurations est présenté à la figure 6.5, y figure également la réponse obtenue par RECYp.

La méthode RECYp utilise le calcul du champ sur une période. Pour tenir compte de la phase entre deux inclusions, celui-ci est multiplié par $\exp(-i\sigma p_r n_p)$ où n_p est le nombre de période entre les deux défauts.

La distance entre les défauts a un impact significatif sur la diffusion qui apparaît clairement sur la figure 6.5. Dans le cas des défauts proches, le champ diffusé semble avoir simplement été multiplié par deux par rapport au cas du défaut isolé. En revanche,

Défaut	18	13–18	17–18	Défaut	18	13–18	17–18
–10% Prop	0.78%	0.90%	0.69%	+10% Prop	2.60%	1.72%	2.69%
–20% Prop	0.85%	1.02%	0.94%	+20% Prop	3.57%	2.57%	3.77%
–30% Prop	1.43%	1.71%	1.83%	+30% Prop	4.54%	3.42%	4.83%
–40% Prop	2.35%	2.57%	3.00%	+40% Prop	5.50%	4.27%	5.86%
–50% Prop	3.35%	3.43%	4.19%	+50% Prop	6.46%	5.13%	6.89%
–60% Prop	4.36%	4.30%	3.40%	+60% Prop	7.41%	5.98%	7.87%
–70% Prop	5.38%	5.16%	6.62%	+70% Prop	8.35%	6.83%	8.84%
–80% Prop	6.40%	6.04%	7.86%	+80% Prop	9.28%	7.67%	9.78%
–90% Prop	7.43%	6.82%	9.11%	+90% Prop	10.21%	8.52%	10.70%

Tableau 6.3 – Erreur relative de RECY pour deux défauts de propriété de $x\%$.

dans le cas des inclusions séparées, le champ diffusé est très différent du cas du défaut isolé.

RECY tout comme RECYp reproduit bien cette évolution. RECYp n'est pas aussi exacte que RECY, car elle correspond à un réseau infini alors que le calcul exact est de taille finie. Les oscillations liées aux effets de bord sont notamment absentes. Ce phénomène a déjà été observé dans le cas de la couche simple (cf. Section 2.9).

Il apparaît néanmoins, que l'effet de phase pour deux défauts est correctement pris en compte, car la correspondance entre RECYp et calcul exact pour 13 – 18 est excellente.

6.4.2 Défauts géométriques

En utilisant une démarche analogue à la section 6.3 pour l'équivalence entre défaut géométrique et défaut de propriétés, nous étudions maintenant le cas de deux défauts géométriques. Pour le réseau de permittivité $\varepsilon_r = 7$ et les trois configurations de défauts 18, 17 – 18 et 13 – 18, nous obtenons les erreurs relatives entre le calcul exact et la méthode RECY présentées sur le tableau 6.4.

Défaut	18	13–18	17–18	Défaut	18	13–18	17–18
–10% Géo	1.46%	1.55%	1.31%	+10% Géo	1.15%	1.06%	0.81%
–20% Géo	1.92%	2.19%	1.87%	+20% Géo	1.04%	1.10%	1.07%
–30% Géo	2.13%	2.55%	2.46%	+30% Géo	1.29%	1.06%	1.68%
–40% Géo	2.60%	3.09%	3.20%	+40% Géo	2.00%	1.03%	2.30%
–50% Géo	3.43%	3.66%	4.06%	+50% Géo	2.39%	1.26%	2.90%
–60% Géo	4.10%	4.14%	4.84%	+60% Géo	3.05%	1.50%	3.36%
–70% Géo	4.77%	4.70%	5.70%	+70% Géo	3.46%	1.84%	3.84%
–80% Géo	5.44%	5.28%	6.59%	+80% Géo	3.88%	2.25%	4.33%
–90% Géo	6.19%	5.89%	7.56%	+90% Géo	4.38%	2.59%	4.81%

Tableau 6.4 – Erreur relative de RECY pour deux défauts de géométrie de $x\%$

Nous obtenons ici encore de très bon résultats.

6.5 Efficacité et rapidité

La méthode RECY s'avère très pertinente pour traiter les exemples du réseau défectueux même lorsque les indices sont assez élevés. La méthode donne des ordres de grandeurs satisfaisant même lorsque les paramètres sont clairement hors approximation du premier ordre. Nous avons souligné au Chapitre 2, la limite de représentativité de la méthode EMFORS, dont le cadre est de traiter des objets infinis, notamment pour des indices élevés. RECY, permettant de traiter les objets finis, ne présente pas ce problème de représentativité. En effet, le champ homogène étant calculé sur l'objet fini, l'effet des bords accentué par le niveau de l'indice est déjà pris en compte dans le calcul du champ dans l'objet sans défaut (idéal). Les erreurs résiduelles sont dues à des interactions d'ordre supérieur du champ diffusé avec le milieu.

De plus comme nous l'avons souligné à la Section 4.5, la méthode RECY permet de calculer le champ diffusé par une simple intégration à partir d'un seul calcul aux éléments finis sur le réseau sans défaut. Le calcul par éléments finis à l'opposé nécessite de refaire un calcul d'élément fini pour chaque configuration de défaut.

La méthode RECYp donne une moins bonne prédiction du champ diffusé que la méthode RECY, en raison de la finitude des objets. Son efficacité (rapidité du calcul) la rend cependant très attractive. Pour comprendre cette limite et le fonctionnement du réseau, nous avons donc étudié les résonances d'inclusions et l'homogénéisation au Chapitre 7. En revanche dans des cas concrets en optique où les objets sont très grands devant la longueur d'onde, c'est sans doute la seule option.

L'efficacité et la précision de RECY nous ont convaincu de son intérêt pour des objets plus complexes et réalistes que des couches infinies. Afin de tester cette application à un cas industriel, nous présentons au Chapitre 8 une étude portant sur des pixels de capteurs CMOS, structures permettant de remplacer la pellicule des nouveaux appareils photos numériques.

Chapitre 7

Résonances d'inclusions et effet de finitude des objets

Les résultats obtenus avec les méthodes du premier ordre présentent un caractère surprenant au premier abord : l'écart au calcul exact (COMSOL) montre des résultats difficile à interpréter lorsque la permittivité moyenne augmente (Section 2.9, Figure 2.5). Notre objectif étant de mettre au point des outils limités uniquement dans leur prédiction par l'amplitude de la fluctuation et non pas la valeur moyenne de la propriété matériau, nous nous sommes attachés à comprendre l'évolution du champ en fonction de la propriété matériau. Les calculs réalisés dans ce chapitre ne sont pas originaux. En revanche la présentation des résultats, en fonction de la propriété matériau, est peu répandue dans la littérature. C'est pourquoi, outre les réflexions physiques qu'ils ont suscitées, il nous a semblé intéressant de les présenter.

Nous commençons par le comportement d'une inclusion cylindrique seule qui présente l'avantage d'avoir une solution analytique (Mie). Nous étudions l'impact du changement de forme, de taille et d'indice des inclusions. Nous poursuivons l'étude en plaçant cette inclusion dans un réseau fini puis infini de période variable. Le réseau fini présentant des similitudes avec une plaque finie, nous avons cherché à l'homogénéiser pour distinguer nettement l'effet des bords et de la taille finie de l'objet.

Dans tout ce chapitre, la polarisation choisie est la polarisation S ou TE ($E_x = E_z = 0$, $E_y \neq 0$).

7.1 Résonance d'une inclusion seule

7.1.1 Solution analytique de Mie d'un cylindre

L'amplitude du champ diffusé par le cylindre circulaire est proportionnelle à un coefficient S [16] (p. 301) dont l'expression dans le cas où le champ incident est le long du cylindre (soit E_y uniquement) est (7.1).

$$S(\theta) = b_0 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} b_m \cos(m\theta), \quad (7.1)$$

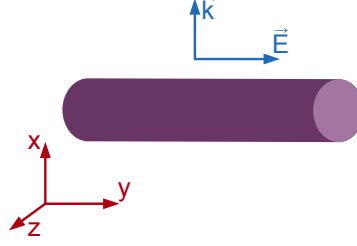


Figure 7.1 – Cylindre circulaire - Position et orientation des vecteurs de base.

avec

$$b_m = \frac{nJ'_m(nka)J_m(ka) - J_m(nka)J'_m(ka)}{nJ'_m(nka)H_m(ka) - J_m(nka)H'_m(ka)}, \quad (7.2)$$

où

- n désigne l'indice du cylindre ($n = \sqrt{\varepsilon_r}$).
 - k désigne l'amplitude du vecteur d'onde dans le vide $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.
 - a désigne le rayon du cylindre circulaire.
 - $J_m(z)$ désigne la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre m .
 - $H_m(z)$ désigne la fonction de Hankel de seconde espèce et d'ordre m .
- Les dérivées de ces deux fonctions sont données par (7.3) et (7.4).

$$J'_m(z) = -J_{m+1}(z) + \frac{mJ_m(z)}{z} \quad (7.3)$$

$$H'_m(z) = -H_{m+1}(z) + \frac{mH_m(z)}{z} \quad (7.4)$$

Il est également possible d'obtenir numériquement le coefficient S en utilisant un code numérique comme COMSOL[®] pour un cylindre de section quelconque.

7.1.2 Solution de Mie d'un cylindre circulaire de rayon variable

La valeur de S est tracée à la figure 7.2 en $\theta = 0$ pour des rayons de $a/\lambda = \frac{0.03}{\sqrt{\pi}} \approx 0.017$, $a/\lambda = 0.01$ et $a/\lambda = 0.03$. La formule (7.1) a été utilisée.

Les pics de résonances de $S(\varepsilon)$ se décalent avec la variation du rayon. Pour de faibles valeurs de permittivité ($\varepsilon < 10$), le coefficient S varie assez peu pour les faibles rayons : la courbe verte $a/\lambda = 0.01$ est plate pour ces valeurs de permittivité. Au contraire pour des rayons plus grands, le paramètre S varie beaucoup : la courbe rouge $a/\lambda = 0.03$ a une pente importante (autour de $\varepsilon = 10$).

On peut également tirer de ces courbes un début d'explication pour les résultats de la Section 2.9. En effet, la forme présentée par ces courbes dans la zone où ε varie autour de 10, nous permet la possibilité d'une analogie entre une plaque finie et un cylindre : celle-ci permettrait d'expliquer que l'écart entre le champ diffusé pour l'objet fini (calcul COMSOL) et celui diffusé par l'objet infini (méthodes au premier ordre) augmente avec l'épaisseur de la couche. Comme le paramètre S est corrélé à la moyenne du champ dans l'inclusion (voir Section suivante), on peut déduire de la figure 7.2 que dans une inclusion cylindrique, le champ augmente avec la permittivité (pour des valeurs de ε autour de

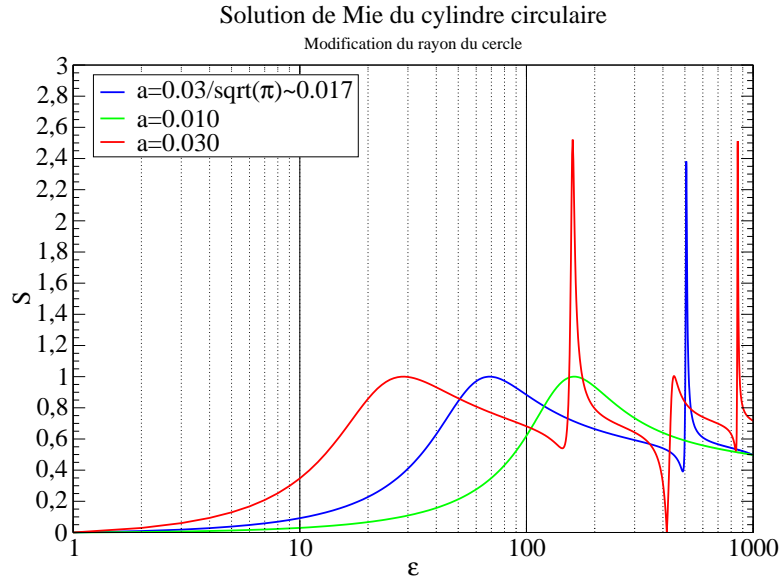


Figure 7.2 – Solution de Mie d'un cylindre circulaire

10) d'autant plus que le rayon est grand. On peut ainsi penser que l'on observera un phénomène analogue lorsque l'on augmentera l'épaisseur d'une plaque finie.

7.1.3 Solution numérique de Mie d'un cylindre de forme variable

Grâce au calcul numérique de S , nous pouvons étudier le changement de forme de l'inclusion. Nous avons pris bien soin de conserver le volume des inclusions inchangées $V = 0.03^2 h$, afin de mettre en évidence le seul effet de la forme.

Nous obtenons alors pour une inclusion carrée, circulaire, elliptique (rapport hauteur 0.5/largeur 1) et rectangulaire mince (plaque) les résultats représentés sur la figure 7.3a.

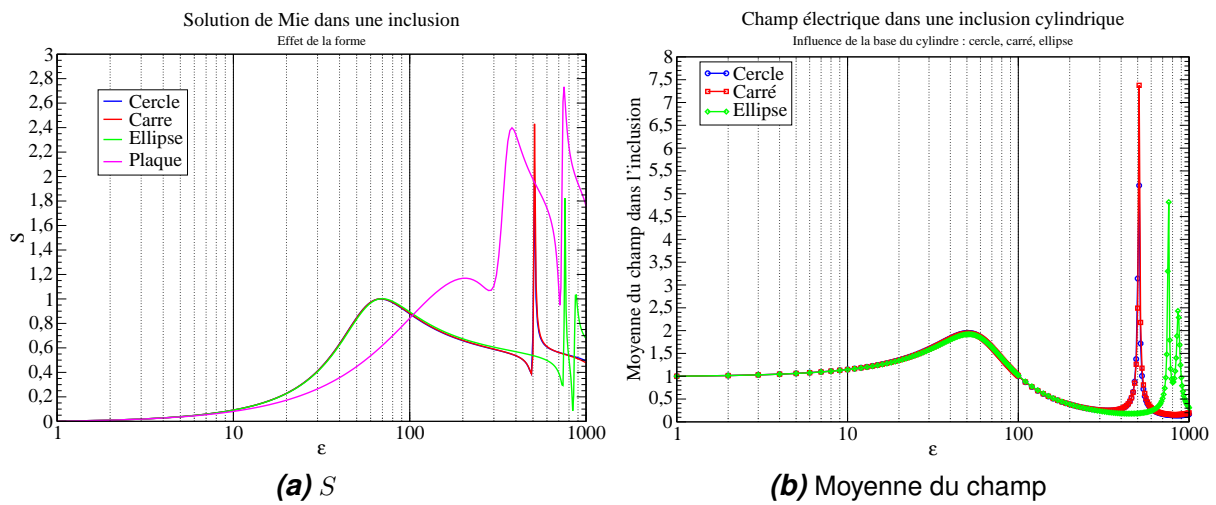


Figure 7.3 – Résonance d'un cylindre circulaire, carré, elliptique ou rectangulaire mince.

Nous observons qu'une inclusion carrée ou circulaire ont quasiment la même solution de Mie. L'ellipse par contre bien qu'ayant un volume identique possède des pics de résonance à des permittivités plus élevées que celle du carré et du cercle.

La moyenne du champ dans l'inclusion est calculée à l'aide de COMSOL. On observe alors que les pics de résonance correspondent à une augmentation du champ dans l'inclusion (cf. Figure 7.3b) qui correspondent aux pics de résonance de la solution de Mie.

Il y a une corrélation entre l'augmentation du champ dans l'inclusion et l'augmentation de S .

7.1.4 Solution de Mie d'un cylindre circulaire à pertes

Nous constatons que le champ lointain tend vers une valeur unique avec l'augmentation des pertes quelque soit la partie réelle de la permittivité (cf. Figure 7.4).

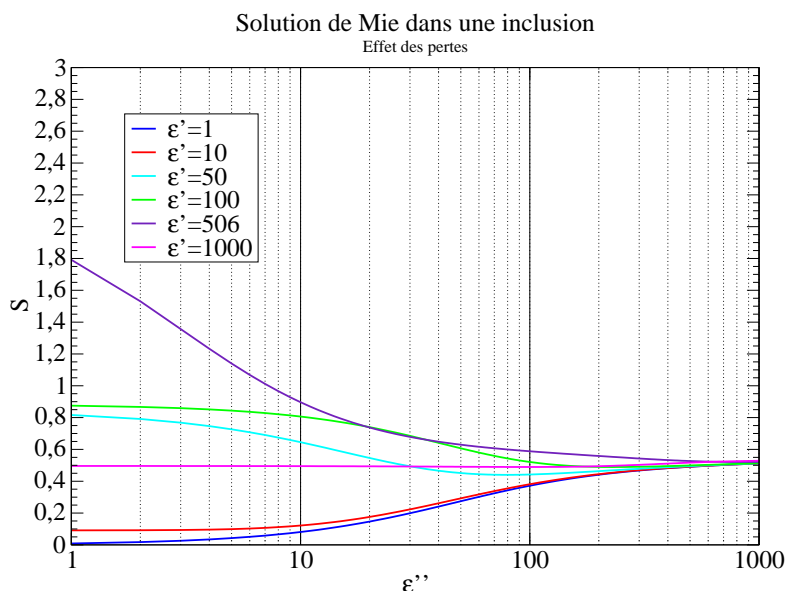


Figure 7.4 – Effet des pertes sur les résonances d'un cylindre circulaire.

7.2 Réseaux finis et infinis, homogénéisation et effet de bords

Dans le chapitre 6, nous avons comparé la méthode RECY et RECYp avec le calcul COMSOL. La méthode RECY utilise le champ dans le réseau fini et RECYp dans un réseau périodique infini. Le champ diffusé calculé par RECYp ne possède pas la dépendance angulaire prévue par RECY et attendu par COMSOL. Cela nous indique que le champ dans le réseau fini est différent du champ dans le réseau infini. Nous allons donc examiner successivement pour un réseau fini et pour un réseau infini la moyenne du champ dans un cylindre (situé au milieu du réseau), pour différentes périodes et sur une plage étendue

de permittivité. Nous considérons un réseau constitué de 11 cylindres de rayon $a = 0.015$ m séparés par une période p_r .

7.2.1 Réseau fini

La taille du réseau fini est fixé à $L = 0.352$ m pour toutes les périodes. Ainsi, il y a 11 inclusions pour la période $p_r = 0.032$ m, 7 inclusions pour la période $p_r = 0.05$ m, 3 inclusions pour la période $p_r = 0.1$ m et $p_r = 0.15$ m et une seule pour les périodes $p_r < 0.15$ m, le champ coïncide dans ce dernier cas à celui d'une inclusion seule (il n'y qu'une inclusion).

Le calcul du champ moyen dans l'inclusion d'un réseau fini est présenté en fonction de la permittivité de l'inclusion. La figure 7.5a traite le cas des petites périodes et la figure 7.5b celle des grandes périodes.

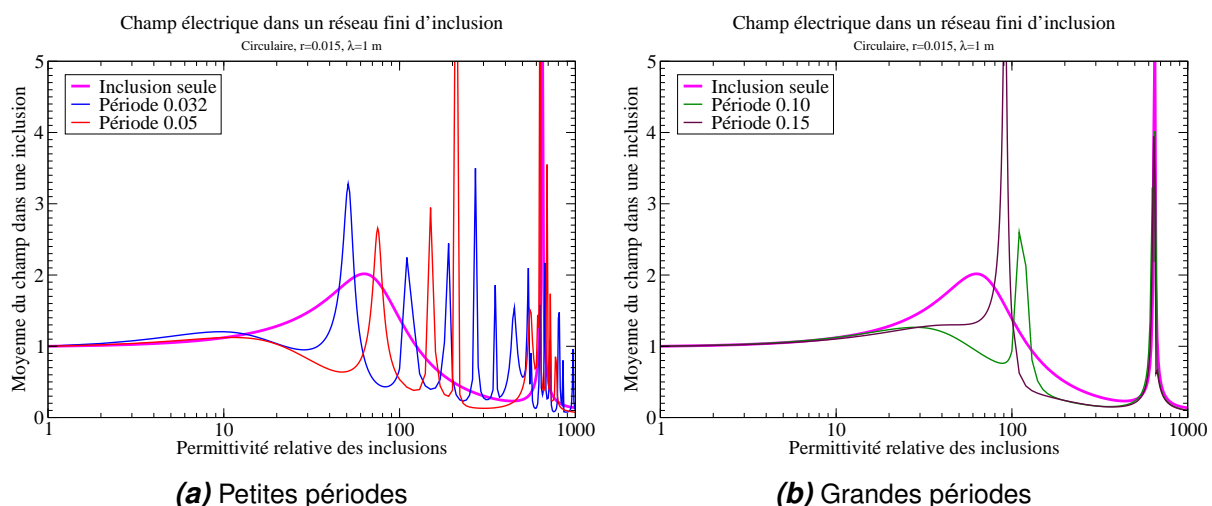


Figure 7.5 – Moyenne du champ dans une inclusion placée dans un réseau fini pour différentes périodes du réseau.

Pour les petites, il existe des plages de permittivité assez étroites où le champ peut varier fortement. On peut envisager deux possibilités pour expliquer ces résonances : soit une interaction entre les particules constituant le réseau, soit un effet lié aux bords de la plaque.

Dans une plaque homogénéisée équivalente, par construction les interactions sont inexistantes. Par conséquent, si le calcul d'une telle plaque fait apparaître les résonances, on pourra en déduire qu'elles ne sont pas dues à des effets d'interaction entre les inclusions.

On utilise la méthode d'homogénéisation de la moyenne. Cette méthode d'homogénéisation est la mieux adaptée pour le cas 2D dans la polarisation où le champ électrique est dirigé selon l'axe des cylindres (cf. Annexe F). Les nb inclusions occupent chacune un volume de πr^2 , l'air occupe dans la plaque équivalente un volume de $2rL - nb\pi r^2$, si nous notons $q = \frac{nb\pi r^2}{2rL}$ le taux d'occupation des inclusions, nous obtenons : $\varepsilon_p = 1 + q(\varepsilon_i - 1)$.

La figure 7.6 présente le calcul du champ dans l'inclusion pour une petite période (compatible de l'hypothèse d'homogénéisation) et le champ dans la plaque homogénéisée. Ces deux courbes ont été déterminée de façon indépendantes respectivement en fonction

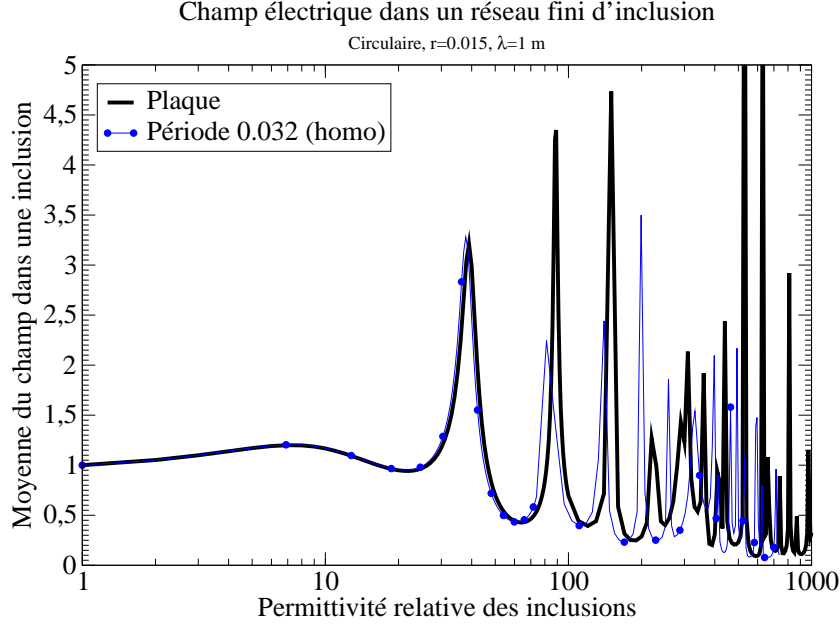


Figure 7.6 – Champ dans le réseau homogénéisé de 11 inclusions circulaires et de la plaque équivalente en fonction de la permittivité.

de la permittivité de l'inclusion et de celle de la plaque. La loi d'homogénéisation décrite ci-dessus a alors été utilisée pour tracer la courbe du réseau en fonction de la permittivité équivalente de la plaque. On observe un bon accord pour des permittivités inférieures à 100.

On remarque par exemple pour le réseau de permittivité $\varepsilon_i = 47$ et respectivement $\varepsilon_i = 65$ et la plaque de permittivité équivalente $\varepsilon_p = 36$ et respectivement $\varepsilon_p = 50$ que les champs sont identiques (cf. Figures 7.7).

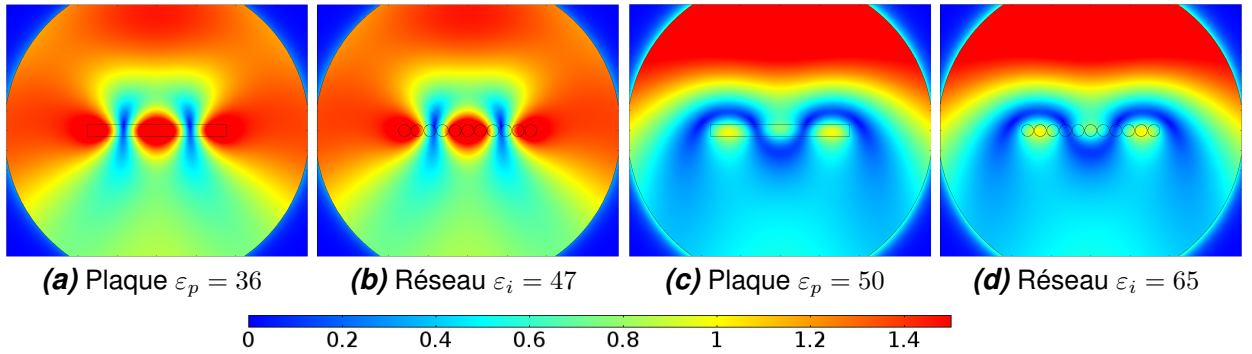


Figure 7.7 – Comparaison entre les champs du réseau d'inclusions et de la plaque homogène équivalente.

L'homogénéisation d'une plaque finie ne permet pas de supprimer les oscillations observées lorsque la permittivité croît. Cette observation écarte donc l'hypothèse de l'interaction entre les inclusions comme origine des oscillations.

Pour les grandes périodes, on observe que le champ tend vers celui d'une inclusion

seule. Ce qui est compréhensible puisque le nombre d'inclusions va diminuer avec l'augmentation de la période sur une taille fixée de l'objet.

L'apparition d'un pic étroit s'est formé pour les périodes permettant d'avoir trois inclusions. Ce pic est semblable à la première résonance de la plaque de taille finie.

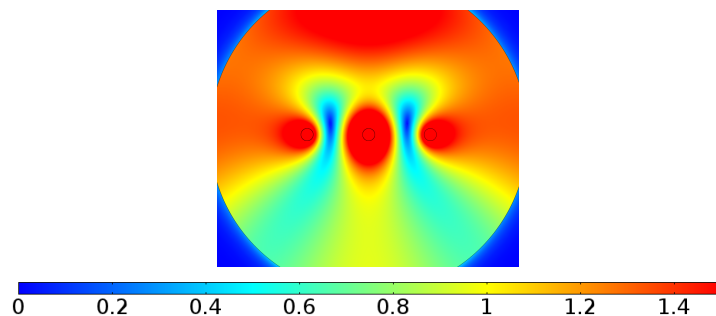


Figure 7.8 – Champ dans le réseau de période $p_r = 0.15$ m et de permittivité de inclusions $\varepsilon_i = 88$.

En effet, si on observe sur la carte des champs à la figure 7.8 pour une permittivité des inclusions à $\varepsilon_i = 88$, on remarque que la carte des champs est assez semblable à celle de la plaque de permittivité $\varepsilon_p = 36$ de la figure 7.7a.

7.2.2 Réseau infini

Nous modélisons un réseau infini en utilisant les conditions périodiques dans le calcul COMSOL. Le calcul du champ moyen dans l'inclusion d'un réseau infini est présenté en fonction de la permittivité de l'inclusion. La figure 7.9a traite le cas des petites périodes et la figure 7.9b celle des grandes périodes.

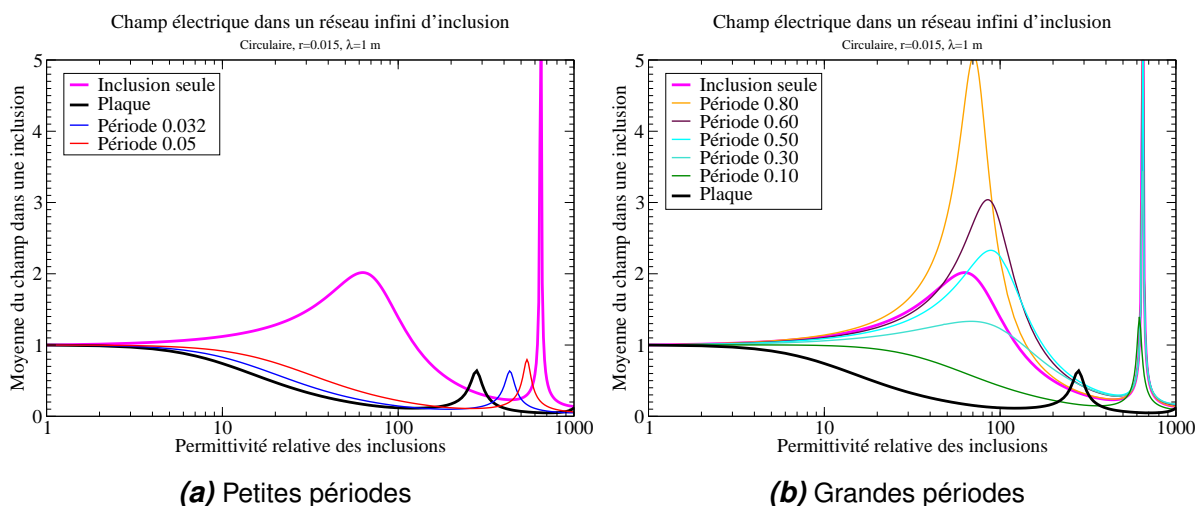


Figure 7.9 – Effet de la période sur la résonance d'inclusions de rayon $a = 0.015$ dans un réseau infini.

Le premier point notable est la disparition des résonances multiples observées sur les figures 7.9. Ces résonances sont donc bien dues aux bords de la plaque ou du réseau.

Pour les petites périodes, le champ tend vers celui d'une plaque homogène (cf. Figure 7.9a). La résonance du réseau de petite période part de la seconde résonance de l'inclusion seule et va progressivement à la résonance de la plaque homogène. Ceci traduit intuitivement l'idée d'homogénéisation du réseau. En effet, lorsque l'on utilise la loi d'homogénéisation de la moyenne (seule méthode d'homogénéisation efficace pour cette polarisation, voir Annexe F), les courbes de champ du réseau de période $p_r = 0.032$ et $p_r = 0.05$ se superposent à celle de la plaque homogène. Ainsi la figure 7.10 consiste à réappliquer la loi d'homogénéisation pour tracer les courbes correspondant au réseau infini en fonction de la permittivité de la plaque homogène infinie équivalente.

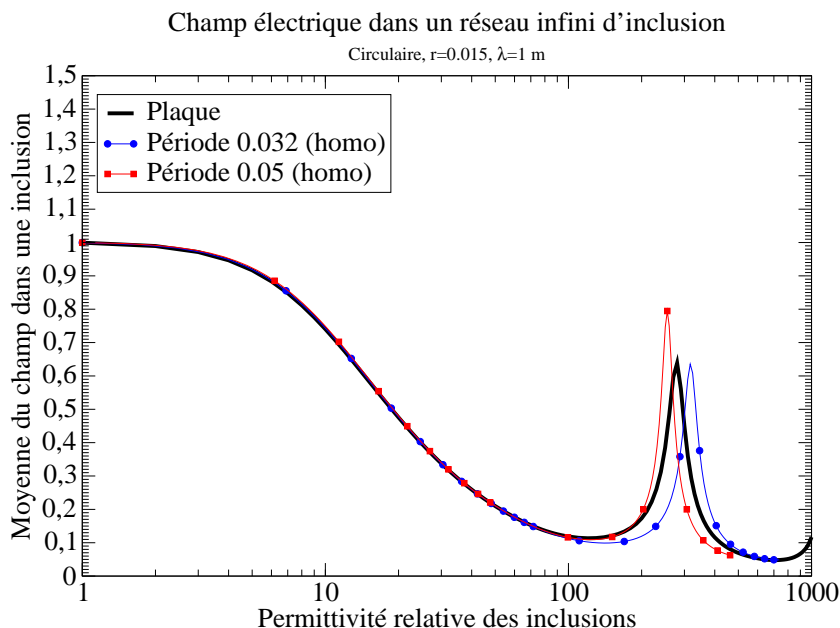


Figure 7.10 – Homogénéisation du réseau infini.

On remarque que la méthode d'homogénéisation n'est pas efficace pour de très forte valeur de permittivité. Pour aller plus loin dans l'analyse de la difficulté d'homogénéiser, nous comparons les cartes de champs dans le réseau de période $p_r = 0.032$ et de permittivité $\varepsilon_i = 420$ et dans une plaque homogène équivalente (déterminée par la loi d'homogénéisation de la moyenne) de permittivité $\varepsilon_p = 270$.

On observe que ces cartes (cf. Figures 7.11) sont très similaires (en valeur) avec cependant une déformation des lignes de champs dans la particule. La particule résonne plus comme un dipôle (donc comme une inclusion isolée), ce qui explique la différence significative observée sur la moyenne du champ (la plaque homogène ne se comporte pas du tout de façon dipolaire). Cette analyse met en exergue la difficulté de l'homogénéisation pour des particules de fort indice.

Lorsque la période augmente, nous tendons vers la limite de diffraction du réseau (le réseau n'est plus homogénéisable). On observe (cf. Figure 7.9b) que la seconde résonance du champ diffusé tend vers celle de l'inclusion seule. La première résonance du réseau se forme lorsque la période augmente et tend à se rapprocher de celle de l'inclusion seule (au moins en ce qui concerne la valeur de permittivité à laquelle elle se produit). Cependant le niveau de cette résonance pour $p_r > 0.5$ est significativement plus élevé que celui de

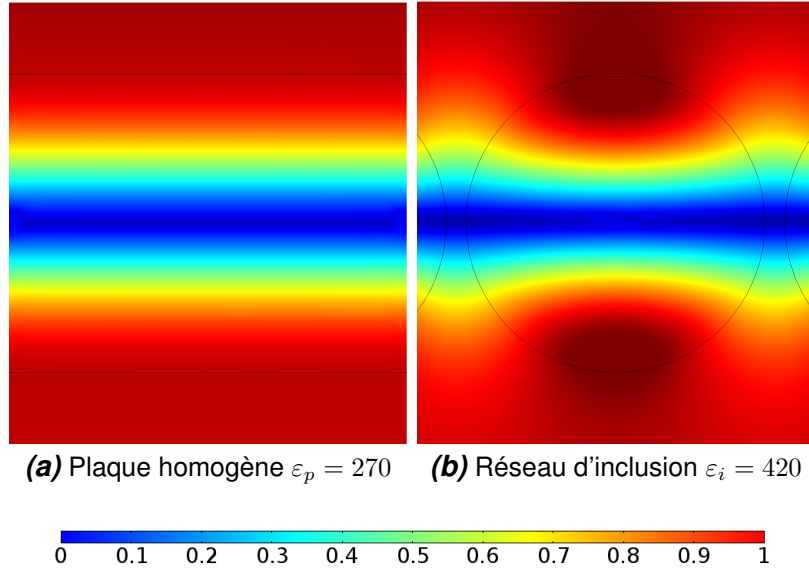


Figure 7.11 – Limite de l'homogénéisation - Champ électrique dans la plaque homogène et dans le réseau.

l'inclusion seule.

7.3 Limite de validité

Nous constatons que dans le calcul de la plaque infinie (cf. Figure 7.11a), le champ est identique tout le long de la plaque. A l'inverse dans une plaque finie (cf. Figure 7.7a) le champ présente de grandes variations le long de la plaque. Cette différence de champ, à l'intérieur de l'objet, entre la plaque finie et infinie, montre clairement que la méthode EMFORS ne sera pas satisfaisante pour des indices élevés. En effet, le champ homogène utilisé par EMFORS est très différent du champ homogène du calcul exact. Ce n'est pas l'approximation du premier ordre qui est à remettre en cause mais le fait de comparer un objet fini et un objet infini. Cette limite est aussi valable pour la méthode RECYp.

L'épaisseur joue aussi un rôle important dans la limite de validité de la méthode. En effet, l'augmentation de la taille des inclusions déplace les résonances vers les faibles indices. L'indice devra donc, pour respecter la limite de validité de l'approximation du premier ordre, être d'autant plus faible que l'épaisseur de l'objet sera importante.

Chapitre 8

Application sur une structure industrielle - CMOS

Pour illustrer l'intérêt de la méthode RECY, nous l'appliquons sur des structures CMOS [52]. Les capteurs CMOS (*Complementary Metal Oxide Semiconductor*) sont des structures analogues aux capteurs CCD. Ces capteurs permettent la prise de photographie en remplaçant la pellicule des anciens appareils photos argentiques.

La surface du capteur est composée de plusieurs millions de photosites. Ces photosites, sensibles à la lumière, transforment cette dernière en courant électrique, proportionnellement à la quantité de lumière reçue. C'est le processeur de l'appareil photo qui convertit ensuite le signal électrique en image.

8.1 Modélisation des structures CMOS

Pour notre application, nous nous intéressons plus particulièrement aux photosites CMOS qui peuvent être schématiquement décrits par la structure représentée sur la figure 8.1.

Chaque photosite a une longueur de $L = 1.75 \mu\text{m}$. Ses caractéristiques diélectriques et dimensionnelles sont données dans le tableau 8.1.

Couche	Hauteur	Permittivité
Microlentille	$0.4 \mu\text{m}$	2.56
Dioxyde de silicium	$0.4 \mu\text{m}$	2.1316
Filtre de couleur	$0.9 \mu\text{m}$	$\varepsilon_r^{filtre} (8.1)$
Nitride de silicium	$0.2 \mu\text{m}$	4
Dioxyde de silicium	$2.5 \mu\text{m}$	2.1316
Silicium	$0.1 \mu\text{m}$	16

Tableau 8.1 – Composition de l'empilement constituant un pixel CMOS

Les filtres de couleurs ont une permittivité donnée par :

$$\varepsilon_r^{filtre} = 2.25 - 10i \left| \frac{\lambda_f - \lambda}{\lambda} \right| \quad (8.1)$$

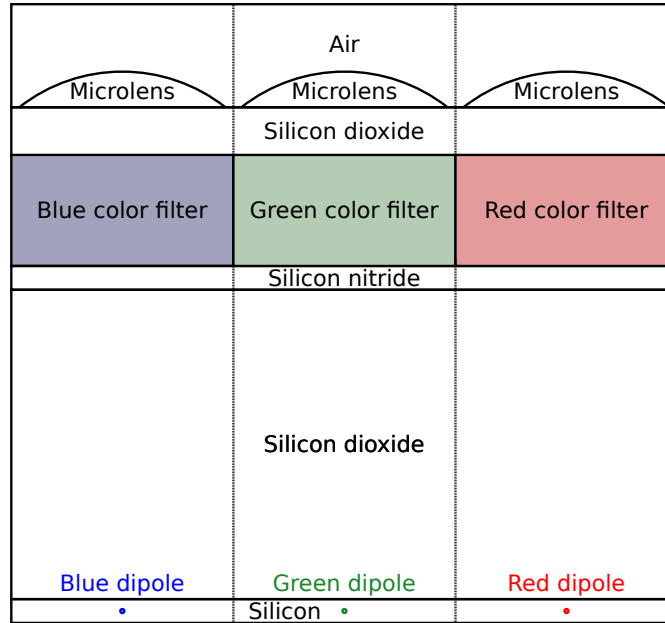


Figure 8.1 – Représentation schématique de photosites CMOS.

avec λ la longueur d'onde d'étude, λ_f la longueur d'onde correspondant à la couleur du filtre :

- $\lambda_f = 450$ nm pour le filtre bleu,
- $\lambda_f = 555$ nm pour le filtre vert,
- $\lambda_f = 650$ nm pour le filtre rouge.

La longueur d'onde du vert $\lambda = 555$ nm est choisie comme longueur d'onde d'étude.

La structure répond à un champ électrique incident comme représentée à la figure 8.2.

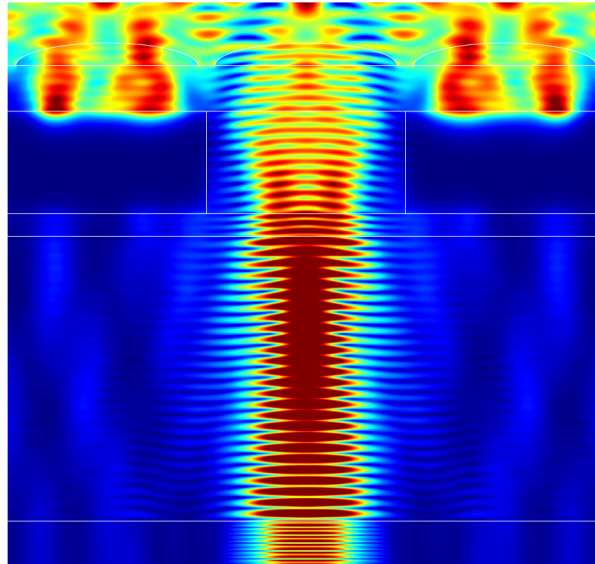


Figure 8.2 – Composante z du vecteur de Pointing dans la structure.

Le dipôle vert placé dans la couche de silicium sous le filtre vert reçoit bien le champ incident. Néanmoins, une partie du champ est transmis vers les dipôles rouge et bleu

(placés dans la couche de silicium sous les filtres rouge et bleu). Ce phénomène est appelé le crosstalk. L'étude consiste à estimer l'impact d'un défaut sur le crosstalk.

8.2 Méthode de calcul : RECY par dipôle

Pour calculer le champ à l'aide de RECY en un point précis, nous devons calculer le champ dans la structure éclairée par le dipôle.

À l'aide de COMSOL nous faisons rayonner un dipôle orienté le long du vecteur unitaire \vec{d} dans la structure au point où nous voulons estimer le champ diffusé. Par le principe de réciprocité exposé précédemment nous pouvons obtenir le champ diffusé en ce point. Le champ diffusé en un point s est donné par la formule suivante :

$$\vec{E}^d(\vec{\rho}_s) \cdot \vec{d} = i\omega \iiint \varepsilon p(\vec{\rho}) \vec{E}^{dip}(\vec{\rho}) \cdot \vec{E}^0(\vec{\rho}) d\vec{\rho} \quad (8.2)$$

avec

- $\vec{E}^{dip}(\vec{\rho})$ champ créé par le dipôle dans la structure,
- $\vec{E}^0(\vec{\rho})$ champ homogène dans la structure idéale éclairé par le champ incident,
- $p(\vec{\rho})$ fonction décrivant l'inhomogénéité de permittivité de la structure.

Le champ est observé en trois points : bleu, vert et rouge situés dans la structure originale au milieu de la couche de silicium, au centre de la zone délimitée du filtre de couleur associé. L'hypothèse d'un défaut de 10% de la lentille au dessus du filtre vert, bleu ou rouge (nous désignerons selon le cas par "lentille verte", "lentille bleue" ou "lentille rouge") sera faite :

$$\varepsilon_r^d = 2.56 (1 + 0.10 r(x)) \quad (8.3)$$

Quatre formes de fluctuations sont choisies (cf. Figure 8.3) :

- Cosinus 1 : $r(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$
- Cosinus 2 : $r(x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$
- Sinus 1 : $r(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$
- Sinus 2 : $r(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$

Le champ incident est normal. La polarisation TM ($E_x \neq 0, E_y = 0, E_z \neq 0$) est choisie. Et seule la composante E_x est étudiée.

8.3 Champ diffusé dans des photosites CMOS

La composante x du champ diffusé des photosites CMOS est étudiée pour les différents défauts (Cosinus 1, 2 et Sinus 1 et 2, pour 5 et 10%) dans les trois configurations différentes : le défaut est sur la lentille bleue, puis sur la verte et enfin sur la rouge. Le champ est déterminé aux points désignés par Blue dipole, Green dipole et Red dipole sur la figure 8.1. Les résultats sont présentés dans les tableaux 8.2, 8.3 et 8.4 pour le défaut Cosinus 1, dans les tableaux 8.5, 8.6 et 8.7 pour le défaut Cosinus 2, dans les tableaux 8.8, 8.9 et 8.10 pour le défaut Sinus 1 et dans les tableaux 8.11, 8.12 et 8.13 pour le défaut Sinus 2.

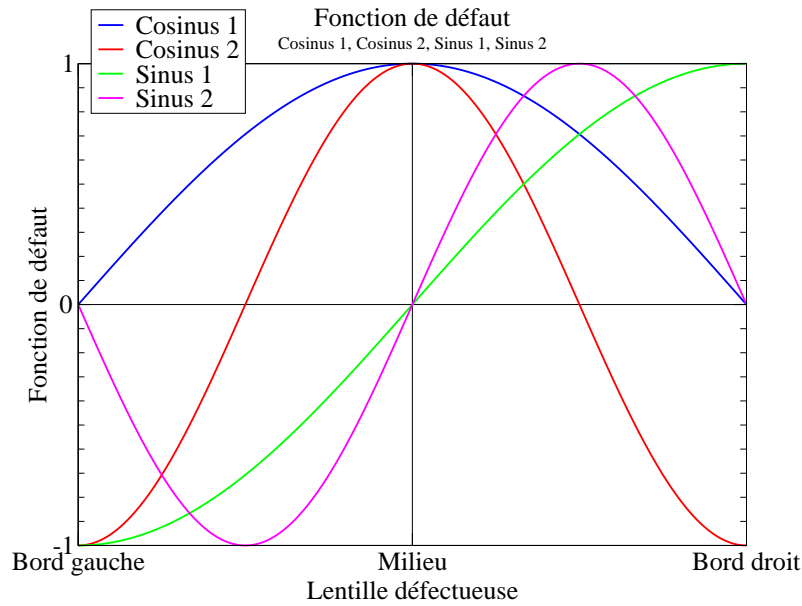


Figure 8.3 – Représentation des fonctions de défauts.

8.3.1 Défaut cosinus 1

E_x^{bleu}	COMSOL	RECY	Différence relative
Bleu	0.0085	0.0082	4.21%
Vert	0.0029	0.0025	13.63%
Rouge	0.0035	0.0031	10.84%

Tableau 8.2 – Composante x du champ diffusé par le défaut Cosinus 1 de la lentille bleue aux trois points : bleu, vert et rouge.

E_x^{vert}	COMSOL	RECY	Différence relative
Bleu	0.0293	0.0257	12.16%
Vert	0.0632	0.0556	11.93%
Rouge	0.0294	0.0259	11.91%

Tableau 8.3 – Composante x du champ diffusé par le défaut Cosinus 1 de la lentille verte aux trois points : bleu, vert et rouge.

E_x^{rouge}	COMSOL	RECY	Différence relative
Bleu	0.0034	0.0030	12.26%
Vert	0.0023	0.0020	15.59%
Rouge	0.0087	0.0083	3.84%

Tableau 8.4 – Composante x du champ diffusé par le défaut Cosinus 1 de la lentille rouge aux trois points : bleu, vert et rouge.

L'accord entre COMSOL et RECY est très satisfaisant.

La symétrie du champ diffusé est remarquable dans le cas du défaut de la lentille verte : le champ sous les filtres rouge et bleu sont identiques et le champ est maximum sous le filtre vert.

En revanche, les défauts sur les lentilles bleue et rouge présentent une dissymétrie. Le champ au dipôle bleu est plus important que celui au dipôle rouge dans le cas où la lentille bleue est défectueuse. Dans le cas où la lentille rouge est défectueuse, c'est le champ au dipôle rouge qui est le plus important. Cette dissymétrie peut s'expliquer par la présence des filtres de couleurs.

Il semble ainsi que le champ diffusé est maximum sous la lentille qui présente le défaut.

De plus si la lentille qui présente le défaut est au dessus du filtre qui laisse passer le champ, alors le crosstalk est plus important que dans le cas où le défaut est au dessus d'un filtre qui absorbe le champ.

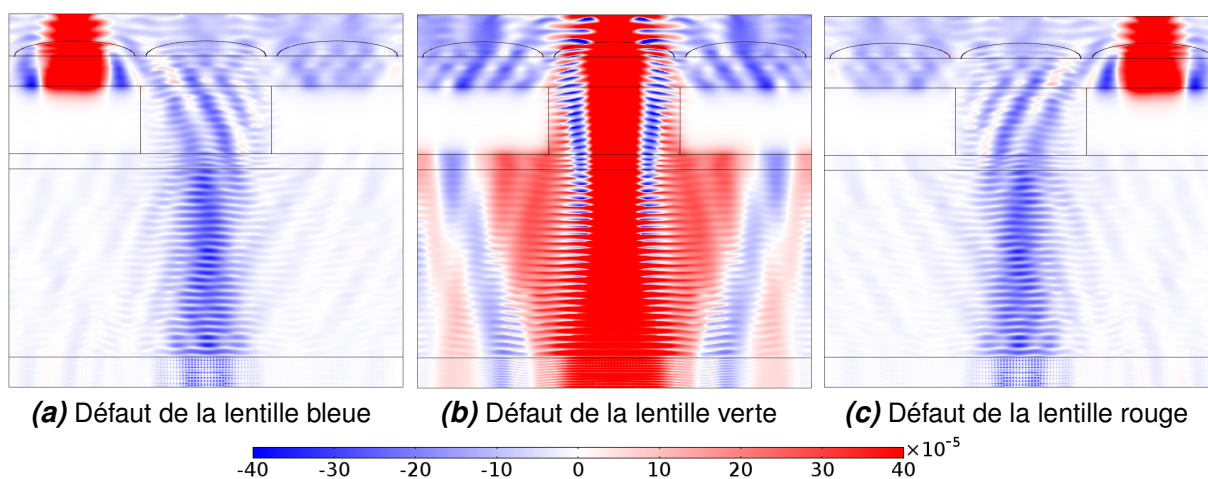


Figure 8.4 – Composante z du vecteur de Pointing du champ diffusé par le défaut Cosinus 1.

La carte des champs (figure 8.4b) confirme la symétrie de la diffusion. Les figures 8.4a et 8.4c comparées avec la figure 8.4b confirment également que le champ diffusé est maximum lorsque le défaut est placé dans l'axe du filtre qui laisse passer le champ. On peut aussi remarquer sur les figures 8.4a et 8.4c que le champ diffusé semble légèrement plus important sous la lentille défectueuse

8.3.2 Défaut cosinus 2

E_x^{bleu}	COMSOL	RECY	Différence relative
Bleu	0.0087	0.0078	10.07%
Vert	0.0011	0.0012	2.46%
Rouge	0.0040	0.0046	14.38%

Tableau 8.5 – Composante x du champ diffusé par le défaut Cosinus 2 de la lentille bleue aux trois points : bleu, vert et rouge.

E_x^{vert}	COMSOL	RECY	Différence relative
Bleu	0.0218	0.0186	14.65%
Vert	0.0347	0.0313	9.58%
Rouge	0.0216	0.0185	14.59%

Tableau 8.6 – Composante x du champ diffusé par le défaut Cosinus 2 de la lentille verte aux trois points : bleu, vert et rouge.

E_x^{rouge}	COMSOL	RECY	Différence relative
Bleu	0.0037	0.0043	15.87%
Vert	0.0009	0.0010	8.11%
Rouge	0.0087	0.0079	9.56%

Tableau 8.7 – Composante x du champ diffusé par le défaut Cosinus 2 de la lentille rouge aux trois points : bleu, vert et rouge.

On obtient à nouveau une très bonne correspondance entre RECY et le calcul COMSOL. Les phénomènes de dissymétrie sur les lentilles rouge et bleue et de symétrie sur la lentille observées pour le défaut Cosinus 1 sont également retrouvés. On peut aussi noter qu'un défaut de type Cosinus 2 engendre un champ diffusé moins important que celui de type Cosinus 1.

8.3.3 Défaut sinus 1

E_x^{bleu}	COMSOL	RECY	Différence relative
Bleu	0.0032	0.0028	10.89%
Vert	0.0012	0.0011	5.12%
Rouge	0.0057	0.0059	3.58%

Tableau 8.8 – Composante x du champ diffusé par le défaut Sinus 1 de la lentille bleue aux trois points : bleu, vert et rouge.

E_x^{vert}	COMSOL	RECY	Différence relative
Bleu	0.0054	0.0051	6.83%
Vert	0.0010	0.0001	89.79%
Rouge	0.0047	0.0050	5.95%

Tableau 8.9 – Composante x du champ diffusé par le défaut Sinus 1 de la lentille verte aux trois points : bleu, vert et rouge.

E_{rouge}^x	COMSOL	RECY	Différence relative
Bleu	0.0062	0.0057	7.65%
Vert	0.0011	0.0010	7.19%
Rouge	0.0023	0.0027	15.33%

Tableau 8.10 – Composante x du champ diffusé par le défaut Sinus 1 de la lentille rouge aux trois points : bleu, vert et rouge.

La méthode RECY donne de bons résultats hormis pour le dipôle vert dans le cas de la lentille verte défectueuse.

Contrairement au défaut cosinus, le champ diffusé n'est pas maximum sous la lentille qui présente le défaut. Ainsi, dans le cas de la lentille bleue défectueuse c'est le dipôle rouge qui présente le champ diffusé le plus important, inversement dans le cas de la lentille rouge défectueuse.

Dans le cas de la lentille verte défectueuse, le champ diffusé est équivalent au dipôle bleu et rouge et plus faible au dipôle vert.

Le champ diffusé est globalement plus faible que dans le cas des défauts Cosinus.

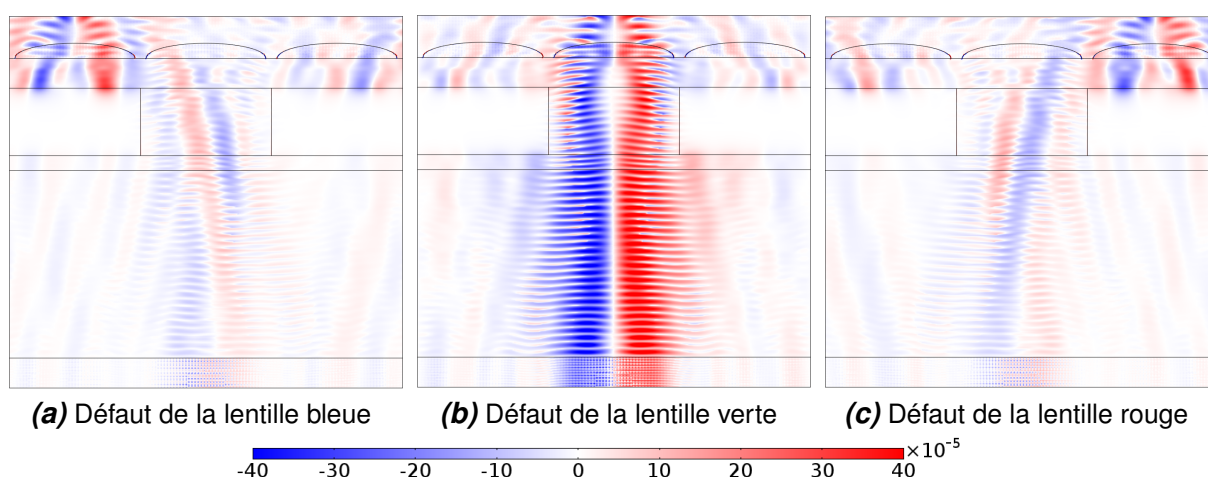


Figure 8.5 – Composante z du vecteur de Pointing du champ diffusé par le défaut Sinus 1.

La carte de champ 8.5a indique une anti-symétrie du champ diffusé, avec au centre une annulation de ce champ. Le champ diffusé au dipôle vert qui se trouve exactement au centre est donc très faible. C'est pourquoi on peut mettre en question l'erreur affiché pour RECY. En effet, le champ calculé par COMSOL est assez éloigné de la valeur nulle attendue (les erreurs numériques sont de l'ordre de grandeur du champ diffusé).

Les cartes 8.5a et 8.5c semblent confirmer que le champ diffusé est plus intense sous la lentille opposée à la lentille défectueuse (observé dans les tableaux 8.8 et 8.10). Par exemple, sur la figure 8.5a le champ diffusé est plus important sous la lentille rouge alors que la lentille bleue est défectueuse.

8.3.4 Défaut sinus 2

E_x^{bleu}	COMSOL	RECY	Différence relative
Bleu	0.0056	0.0053	6.05%
Vert	0.0025	0.0025	1.12%
Rouge	0.0035	0.0034	0.94%

Tableau 8.11 – Composante x du champ diffusé par le défaut Sinus 2 de la lentille bleue aux trois points : bleu, vert et rouge.

E_x^{vert}	COMSOL	RECY	Différence relative
Bleu	0.0072	0.0076	5.97%
Vert	0.0023	0.0002	91.95%
Rouge	0.0085	0.0077	9.30%

Tableau 8.12 – Composante x du champ diffusé par le défaut Sinus 2 de la lentille verte aux trois points : bleu, vert et rouge.

E_x^{rouge}	COMSOL	RECY	Différence relative
Bleu	0.0041	0.0033	17.47%
Vert	0.0028	0.0024	13.22%
Rouge	0.0048	0.0052	7.95%

Tableau 8.13 – Composante x du champ diffusé par le défaut Sinus 2 de la lentille rouge aux trois points : bleu, vert et rouge.

RECY est en accord avec le calcul COMSOL.

Comme pour les cas du cosinus, le champ diffusé maximum est retrouvé sous la lentille qui présente le défaut pour les lentilles bleue et rouge.

Pour la lentille verte, le champ diffusé est maximum sur les dipôles rouge et bleu. Le champ sur le dipôle vert est plus faible (avec une erreur importante).

On peut, comme dans le cas Sinus 1, mettre en doute l'erreur obtenue au point vert pour une lentille verte défectueuse. En décalant le point de part et d'autre de la position centrale, on peut mettre en évidence que l'erreur décroît dès que l'on s'éloigne de cette position. Le calcul du champ sur des dipôles proche du vert de par et d'autre : $\pm L/10$, $\pm L/20$, $\pm L/40$, $\pm L/80$, $\pm L/160$ est effectué (cf. tableau 8.14).

E_x^{vert}	COMSOL	RECY	Différence relative
$-L/10$	0.0106	0.0111	4.38%
$-L/20$	0.0071	0.0077	9.55%
$-L/40$	0.0037	0.0043	14.51%
$-L/80$	0.0023	0.0023	0.04%
$-L/160$	0.0020	0.0012	38.61%
Vert	0.0023	0.0002	91.95%
$+L/160$	0.0029	0.0010	65.09%
$+L/80$	0.0038	0.0021	45.57%
$+L/40$	0.0056	0.0041	27.00%
$+L/20$	0.0091	0.0076	16.07%
$+L/10$	0.0124	0.0111	9.83%

Tableau 8.14 – Composante x du champ diffusé par le défaut Sinus 2 de la lentille verte aux points autour du point vert.

La baisse de l'erreur est en corrélation avec l'augmentation du champ diffusé. La méthode RECY donne des résultats symétriques autour du dipôle vert. Ce n'est pas le cas pour le calcul COMSOL, le minimum de diffusion n'est pas centré sur le dipôle vert mais légèrement décalé vers le dipôle bleu. Néanmoins, la carte des champs (figure 8.6b) montre une antisymétrie du champ diffusé en accord avec les résultats de RECY. Il semble donc comme pour le sinus 1 que le champ diffusé soit mieux évalué par RECY en ce point singulier.

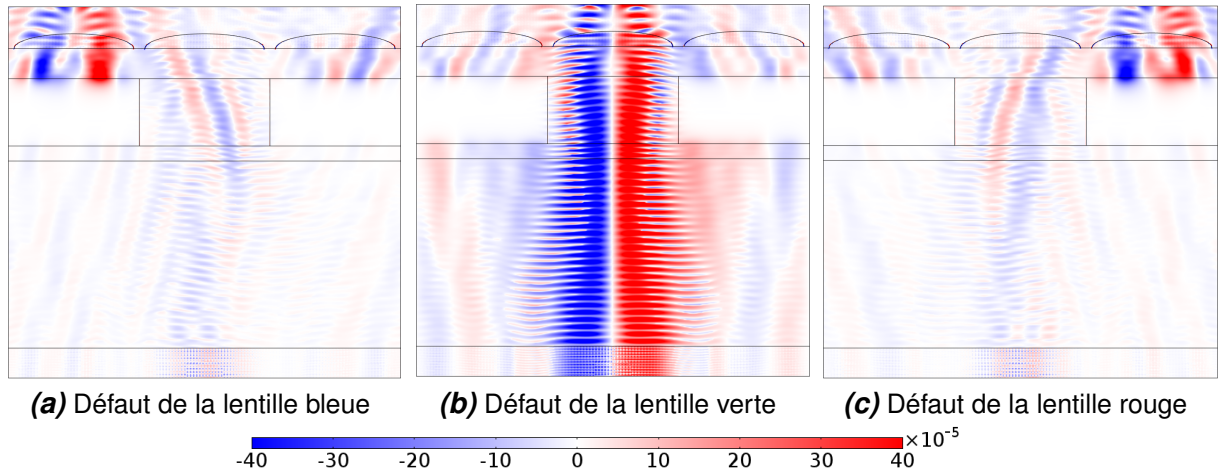


Figure 8.6 – Composante z du vecteur de Pointing du champ diffusé par le défaut Sinus 2.

Les cartes (figures 8.6a et 8.6c) confortent l'idée de maximum de diffusion sous la lentille défectueuse. L'intensité des couleurs des cartes confirme également la faiblesse du champ diffusé.

Conclusion

La contribution des fluctuations de perméabilité au champ diffusé est une avancée significative ouvrant une richesse de phénomènes que nous avons illustrée dans cette partie. Nous avons relevé que pour une valeur moyenne de perméabilité égale à celle de permittivité, une fluctuation de perméabilité possède une intensité diffusée de niveau moindre à celle d'une même fluctuation de permittivité. De plus à fluctuation fixée et identique la corrélation des fluctuations sur la permittivité et la perméabilité semble exacerber l'intensité diffusée. Nous avons aussi noté que l'intensité diffusée était fonction de la valeur moyenne des propriétés et de la forme de la fluctuation. Les modèles analytiques nous ont permis d'obtenir des coefficients (β) indépendant de la fluctuation caractérisant le potentiel de diffusion d'une couche de magnéto-électrique. Dans le cas d'une couche mince, une forme analytique très simple peut être utilisée pour estimer très rapidement le champ diffusé.

L'application de la méthode RECY à des structures plus complexes s'avère très concluante. Le champ diffusé est très bien estimé par RECY pour les réseaux, aussi bien pour la fluctuation de propriété que pour des fluctuations géométriques grâce à la formule d'homogénéisation simple pour la polarisation considérée. L'extension de RECY à une structure infinie, appelée RECYp, nécessite une attention particulière pour la comparaison avec un calcul de champ effectué sur un objet fini.

L'étude des inclusions nous a montré qu'il y avait peu de différences entre les champs diffractés par des inclusions de forme circulaire, carrée, ellipsoïde et rectangulaire mince pour des permittivités inférieures à 10. Elle nous a également confirmé que la taille de l'inclusion (= épaisseur de plaque équivalente) induit une évolution en fonction de la permittivité différente selon la taille. Pour des permittivités inférieures à 20, plus l'inclusion est de taille importante et plus le champ diffracté varie pour de faibles fluctuations. La variation de la période entre les inclusions du réseau montre que le champ diffracté ressemble à celui d'une couche homogène pour de faibles périodes et à celui d'une inclusion seule pour de grandes périodes.

L'application aux structures CMOS, nous a permis d'utiliser RECY en champ proche. Les résultats obtenus montrent un bon accord avec le calcul exact. Nous nous sommes limités à quelques formes de fluctuations pour un défaut exclusivement situé dans la lentille, car nous visions simplement à démontrer la polyvalence et l'efficacité de RECY sur n'importe quelle structure périodique réciproque. Non, seulement RECY est très efficace pour comparer rapidement entre elles l'effet de formes variées de fluctuation, mais elle permet même de donner de meilleurs résultats qu'un calcul exact lorsque le champ diffusé devient très faible.

Le développement de RECY a été fait dans l'objectif d'une application à des milieux complexes magnéto-diélectrique. D'autre part dans le laboratoire, une activité de

développement de cristaux photoniques suscitait des questions liées à leur diffusion éventuelle. Ceux-ci étant des milieux complexes, RECY semblait particulièrement adapté à cette étude. C'est pourquoi l'intégralité de la troisième partie sera consacré aux cristaux photoniques. Néanmoins, nous verrons que ce cas particulier nous conduira à explorer les limites de validité de RECY.

Troisième partie

Diffusion dans les cristaux photoniques

Introduction

Dans le cadre d'une application pour les lasers femtosecondes, nous nous sommes particulièrement intéressés à l'exploitation de la bande interdite pour réaliser des miroirs réflecteurs à base de cristaux photoniques. Dans ce cadre, une réflectivité maximale est donc recherchée. Celle-ci peut être fortement impactée par des défauts dans le cristal. Les résultats obtenus dans la seconde partie pour les réseaux et la structure CMOS, nous encouragent à utiliser notre méthode RECY pour ces structures.

Les cristaux photoniques sont des structures particulières permettant d'obtenir des bandes photoniques interdites de fréquences pour lesquelles le champ ne peut se propager. Il existe des cristaux en 1D, 2D et 3D. Les cristaux 1D sont constitués d'un empilement périodique de couches. L'étude de défauts en son sein peut donc être menée avec la méthode développée pour un multicouche (EMFORS). Pour les cristaux 2D et 3D, RECY peut être utilisée. Néanmoins, la structure particulière du cristal peut rendre les défauts dans la structure résonants. On sait en effet, que les défauts réalisés de façon intentionnelle permettent de créer des cavités résonantes, des guides d'ondes, etc.

Nous rappellerons en Annexe I, les équations qui régissent la propagation des ondes dans la structure. Au Chapitre 9, nous étudierons le diagramme de bandes de certains cristaux pour en comprendre les mécanismes.

Après avoir vu les principales caractéristiques des cristaux photoniques, nous nous intéressons à l'impact de défauts dans le cristal. L'étude pour des défauts 3D étant plus coûteuse, nous nous sommes tout d'abord intéressé au Chapitre 10 à un cristal 2D, permettant d'obtenir les principaux mécanismes de diffusion du cristal. Nous remarquerons que le nombre de période du cristal est essentielle à l'établissement complète de la bande interdite. La réflexion maximale est ainsi proportionnelle à la tangente hyperbolique du nombre de période comme pour un cristal 1D. Nous constatons que la méthode RECY au premier ordre n'est pas suffisante pour un cristal photonique. Dans le cadre de l'étude statistique que nous cherchons à réaliser, nous avons donc mis en place une étude par une méthode de Monte-Carlo.

Enfin, au Chapitre 11, nous étudions, après avoir brièvement expliqué les modes opératoires de fabrications des cristaux, les défauts dans les cristaux photoniques 3D. Cette étude est faite en comparant les résultats expérimentaux obtenues sur nos réalisations et les résultats de la méthode de Monte-Carlo faites sur les cristaux 2D.

Chapitre 9

Structures de bandes

Les cristaux photoniques sont des structures dont l'équation d'onde est caractérisée par un diagramme de bande. Ce diagramme indique quelles sont les fréquences qui peuvent se propager dans le cristal. Pour comprendre ce mécanisme, nous avons étudié en détail la structure de bande d'un cristal d'abord en 1D puis en 2D. Nous avons observé grâce à un code d'éléments finis, le champ à l'intérieur d'un cristal 2D et ainsi pu appréhender concrètement le diagramme de bande.

9.1 Structure de bande d'un cristal 1D

Les cristaux à une dimension forment traditionnellement ce que l'on appelle un miroir de Bragg. Ces cristaux sont constitués d'un empilement alternatif de couches de diélectrique de permittivités différentes. Les technologies de la photonique permettent néanmoins d'envisager d'autres structures où la permittivité diélectrique est modulée périodiquement, par exemple suivant une évolution sinusoïdale. Bien que nettement moins courantes, ces structures conduisent à une formulation analytique plus simple que les empilements de Bragg, permettant d'appréhender facilement les caractéristiques du diagramme de bandes [13].

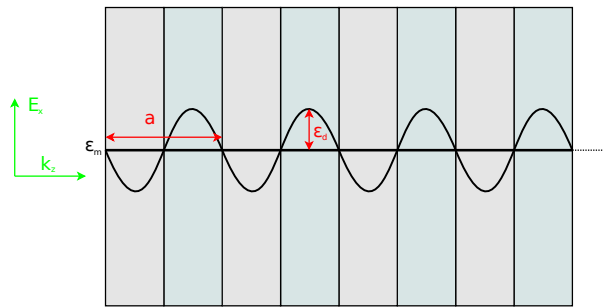


Figure 9.1 – Cristal 1D obtenu par modulation sinusoïdale de la permittivité diélectrique.

Nous supposons que la permittivité diélectrique suit une modulation sinusoïdale suivant l'axe Oz autour d'une valeur moyenne ε_m avec une amplitude ε_d et de période a_z (cf. Figure 9.1) :

$$\varepsilon_r(z) = \varepsilon_m + \varepsilon_d \sin\left(\frac{2\pi}{a_z}z\right)$$

La permittivité étant de période a_z en z , le vecteur primitif du réseau direct est donc donné par :

$$\vec{e}_1 = a_z \vec{e}_z$$

Le vecteur primitif du réseau réciproque est donc donné (en utilisant la relation : $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1^* = 2\pi$) par :

$$\vec{e}_1^* = \frac{2\pi}{a_z} \vec{e}_z$$

on définit alors

$$\vec{G}_n = n \vec{e}_1^* \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

La permittivité peut alors se mettre sous la forme (en exprimant en exponentielle le sinus et en utilisant les \vec{G}_n) :

$$\varepsilon_r(z) = \varepsilon_m e^{i\vec{G}_0 \cdot \vec{z}} + \frac{\varepsilon_d}{2i} e^{i\vec{G}_1 \cdot \vec{z}} + \frac{-\varepsilon_d}{2i} e^{i\vec{G}_{-1} \cdot \vec{z}}$$

Les $\varepsilon_r(\vec{G}_n)$ sont donc donnés par :

$$\varepsilon_r(\vec{G}_0) = \varepsilon_m \quad ; \quad \varepsilon_r(\vec{G}_1) = \frac{\varepsilon_d}{2i} \quad ; \quad \varepsilon_r(\vec{G}_{-1}) = \frac{-\varepsilon_d}{2i}$$

L'onde électromagnétique se propage suivant l'axe Oz (donc seul $k_z \neq 0$) et le champ électrique est pris suivant l'axe Ox (donc seul $E_x \neq 0$). La périodicité de la permittivité permet d'utiliser la relation précédemment établie (cf. Équation (I.12)) :

$$(k + G_p)^2 E_p = \sum_{n=-1}^1 \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \varepsilon_r(\vec{G}_n) E_{p-n}$$

Soit :

$$\left(k + p \frac{2\pi}{a_z} \right)^2 E_p = - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \left[\frac{\varepsilon_d}{2i} E_{p+1} - \varepsilon_m E_p - \frac{\varepsilon_d}{2i} E_{p-1} \right]$$

Pour obtenir les structures de bandes, il suffit d'écrire le problème sous forme matricielle, puis d'utiliser un solveur d'équation aux valeurs propres généralisées, par exemple la fonction **eig** de Matlab[®].

Cette matrice étant infinie, il faut la tronquer de façon à avoir une matrice carrée de taille finie. Pour une matrice de taille (21×21) , une valeur moyenne de permittivité $\varepsilon_m = 6$ et différentes valeurs d'amplitude de modulation ε_d , les structure de bandes obtenues sont représentées sur la figure (9.2).

Les résultats pour les différentes valeurs de la modulation montrent que la modulation ($\varepsilon_d > 0$) provoque l'ouverture des bandes interdites. De plus, ils montrent que les bandes interdites sont d'autant plus grandes que la modulation de permittivité est forte.

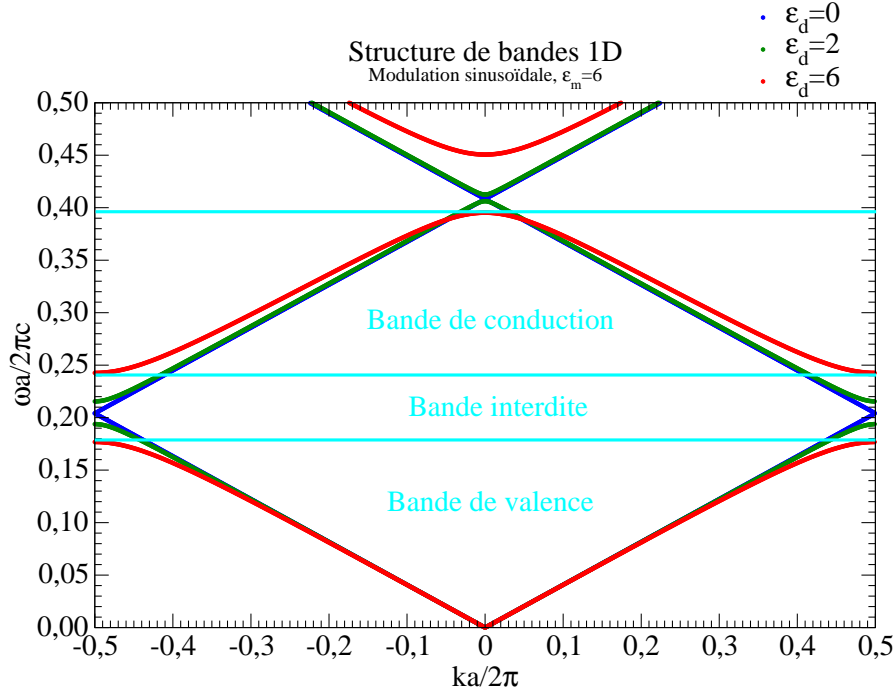


Figure 9.2 – Diagrammes de bandes d'un cristal 1D obtenu par modulation sinusoïdale de la permittivité diélectrique. Le cas $\varepsilon_d = 0$ correspond au diagramme des photons libres.

9.2 Structure de bandes d'un cristal 2D

L'analyse des diagrammes de bandes dans le cas des cristaux photoniques 1D a permis de mettre en évidence l'ouverture des bandes interdites lorsque la différence de permittivité entre les deux éléments répétitifs du cristal augmente. Ce phénomène se retrouve dans les cas 2D et 3D. Cependant le cas 2D est plus complexe à décrire que le cas 1D. Les cristaux bidimensionnels possèdent deux directions de propagation (k_x et k_y), et deux polarisations sont à distinguer (TE et TM). L'exemple 2D le plus simple est le réseau carré [13] (cf. Figure (9.3))

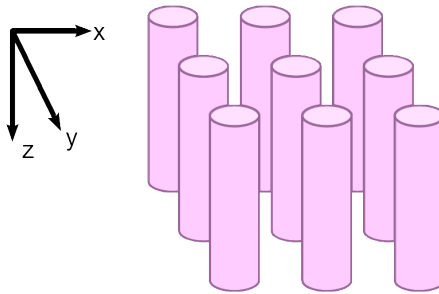


Figure 9.3 – Cristal photonique 2D - Réseau carré.

Le cristal photonique est constitué de tiges cylindriques de permittivité ε_b sur un réseau carré de période a et de rayon r_c inférieur à la période du réseau a réparties dans un milieu de permittivité ε_a . La dépendance spatiale de la permittivité ε_r peut alors

s'exprimer de la façon suivante :

$$\varepsilon_r(\vec{r}) = \varepsilon_b + \sum_{\vec{R}} (\varepsilon_a - \varepsilon_b) \mathcal{H}(\vec{r} - \vec{R})$$

où $\mathcal{H}(\vec{r} - \vec{R})$ est la fonction de Heaviside qui vaut 0 si $\vec{r} > \vec{R}$ et vaut 1 sinon et $\vec{R} = p\vec{e}_1 + q\vec{e}_2$ est un vecteur du réseau direct avec p et q des entiers relatifs.

Les vecteurs du réseau direct primitif sont donnés par :

$$\vec{e}_1 = a\vec{e}_x ; \quad \vec{e}_2 = a\vec{e}_y$$

Étant donnée la relation entre les vecteurs du réseau direct et ceux du réseau réciproque, les vecteurs primitifs du réseau réciproque sont donc donnés par :

$$\vec{e}_1^* = \frac{2\pi}{a}\vec{e}_x ; \quad \vec{e}_2^* = \frac{2\pi}{a}\vec{e}_y$$

Et $\vec{G}_{m,n} = m\vec{e}_1^* + n\vec{e}_2^*$ vecteur du réseau réciproque avec m et n des entiers relatifs.

La périodicité de la permittivité permet d'utiliser la relation précédemment établie (cf. Équation (I.12)). Les composantes de Fourier de la permittivité $\varepsilon_r(\vec{G})$ doivent donc être exprimées. Mais contrairement au cas simple de 1D, elles ne peuvent s'obtenir qu'avec la formule :

$$\varepsilon_r(\vec{G}) = \frac{1}{S_{cell}} \iint \varepsilon_r(\vec{r}) e^{-i\vec{G} \cdot \vec{r}} d\vec{r} \quad (9.1)$$

Étant donnée la symétrie circulaire du cristal et en utilisant les fonctions de Bessel de première espèce :

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^{2p} p! (n+p)!} x^{2p} \quad (9.2)$$

Sachant que :

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{J_1(u)}{u} = \frac{1}{2}$$

Les composantes de Fourier prennent la forme :

$$\varepsilon_r(\vec{G}) = \varepsilon_b \delta_{\vec{G}, \vec{0}} + (\varepsilon_a - \varepsilon_b) \frac{2\pi r_c^2}{S_{cell}} \frac{J_1(|\vec{G}|r_c)}{|\vec{G}|r_c} \quad (9.3)$$

où $\delta_{\vec{G}, \vec{0}} = 1$ si $\vec{G} = \vec{0}$ et $\delta_{\vec{G}, \vec{0}} = 0$ si $\vec{G} \neq \vec{0}$.

L'onde électromagnétique se propage dans le plan (xOy) (donc seuls $k_x \neq 0$ et $k_y \neq 0$).

La surface de la cellule S_{cell} est donnée par : $S_{cell} = a^2$ et la norme du vecteur du réseau réciproque $|\vec{G}|$ par : $|\vec{G}| = \frac{2\pi}{a} \sqrt{m^2 + n^2}$.

Comme dans le cas 1D, une écriture sous forme de matrice tronquée et un solveur d'équations aux valeurs propres généralisées permettent d'obtenir toutes les valeurs propres dans les deux polarisations. La polarisation E_z où le champ électrique est orienté le long des cylindres est obtenue par la méthode E et la polarisation H_z où le champ magnétique est le long des cylindres est obtenue par la méthode H.

De prime abord, la représentation du diagramme de bande doit se faire en 3D car le cristal possède en deux dimensions un vecteur d'onde d'onde à deux composantes k_x et k_y . Nous obtenons alors, par exemple, en polarisation E_z (ou TM), pour un réseau carré de cylindre circulaire de rayon $r = 0.2a$ et de permittivité $\varepsilon_r = 9$, la structure de bande représentée sur la figure 9.4.

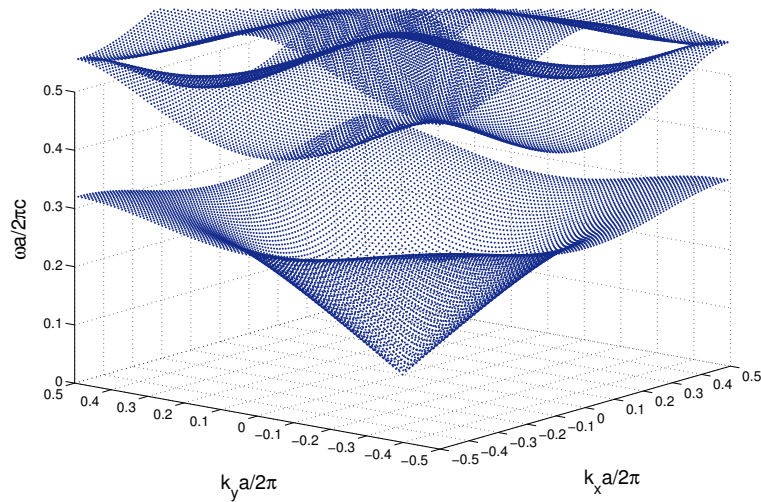


Figure 9.4 – Cristal photonique 2D - Structure de bandes - Polarisation E_z .

Cette représentation n'est pas très pratique à exploiter bien que l'on distingue, dans ce cas, nettement le gap. C'est pourquoi, les structures de bandes sont généralement représentées de façon simplifiées en 2D en utilisant les symétries du cristal selon les contours de la zone irréductible de Brillouin.

La première zone de Brillouin est la cellule élémentaire de l'espace réciproque dont les points sont plus proches de l'origine que de tous les autres nœuds du réseau périodique. La figure 9.5 montre la zone irréductible de Brillouin du réseau carré.

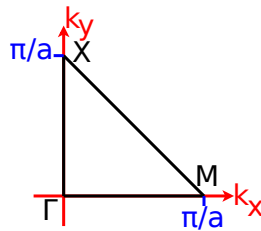


Figure 9.5 – Cristal photonique 2D - Zone irréductible de Brillouin du réseau carré.

Dans le cas du réseau carré, la zone irréductible de Brillouin est donnée par un triangle isocèle rectangle dont les deux côtés égaux ont la longueur $\frac{\pi}{a}$. Les points Γ , X et M désignent traditionnellement les trois sommets du triangle. Γ désigne le centre de la première zone de Brillouin, X le milieu d'une arête et M un sommet.

Pour tracer alors le diagramme en 2D, le triangle est alors parcouru selon les trois directions ΓX , XM et $M\Gamma$.

- La direction ΓX correspond à une variation de k_y entre $[0, \frac{\pi}{a}]$ à k_x fixé à 0.
- La direction XM correspond à une variation de k_y entre $[0, \frac{\pi}{a}]$ à k_x fixé à $\frac{\pi}{a}$.
- La direction $M\Gamma$ correspond à une variation de $k_y = k_x$ entre $[\frac{\pi}{a}, 0]$.

Le diagramme de bandes en E_z de ce cristal devient en utilisant les lignes de la zone irréductibles de Brillouin, un diagramme en 2D représenté à la figure 9.6a. Dans l'autre polarisation H_z (ou TE), nous obtenons de la même façon un diagramme 2D, représenté à la figure 9.6b.

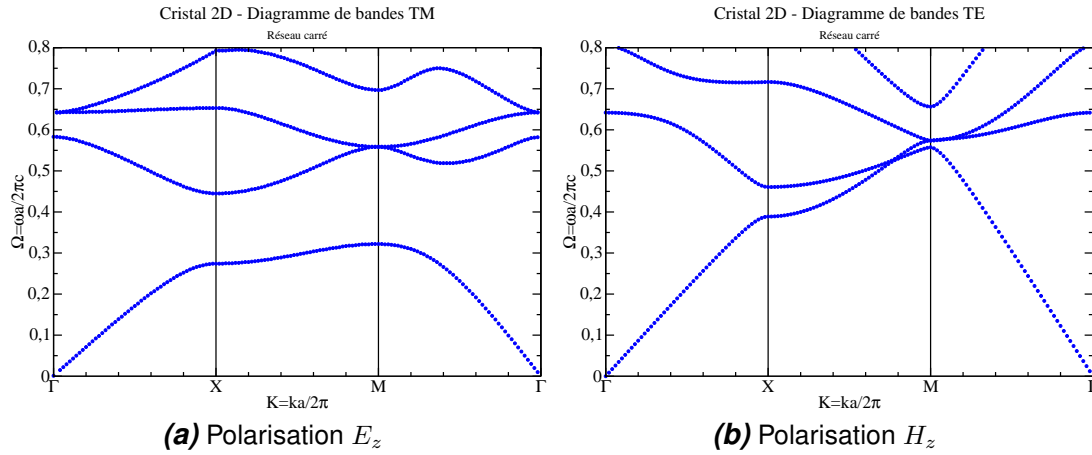


Figure 9.6 – Cristal photonique 2D - Diagramme de bandes. Représentation en suivant les lignes de la zone irréductible de Brillouin.

Comme pour le cristal en 1D, il est possible de tracer le diagramme des photons libres de la structure (cf. Figure 9.7) en prenant pour permittivité de la matrice et des inclusions la permittivité moyenne de la structure $\varepsilon_m = 2.1$.

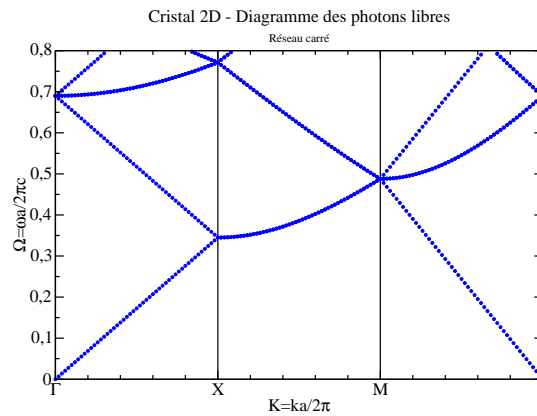


Figure 9.7 – Cristal photonique 2D - Diagramme des photons libres.

Comme dans le cas 2D, nous observons l'ouverture de bandes interdites depuis le diagramme des photons libres (cf. Figure 9.7). S'ajoute en 2D, l'effet de la polarisation. En effet, les diagrammes de bandes (cf. Figures 9.6a et 9.6b) ne sont pas identiques. Nous observons que, dans la polarisation H_z , il y a des bandes interdites (Band-Gap) uniquement dans certaines directions. A l'inverse, dans la polarisation E_z , il existe une

bande interdite s'étalant dans toutes les directions. En conséquence, le réseau carré ne possède pas de bande interdite complète. Néanmoins, il existe d'autres types de structures 2D possédant cette bande interdite complète [11, 13].

9.3 Compréhension de la structure de bande

Pour nous faire une idée plus concrète de la signification des K et des Ω du diagramme de bande, avec $\Omega = \frac{\omega a}{2\pi c_0} = a \frac{\nu_0}{c_0}$ et $K = \frac{ka}{2\pi} = \frac{a}{\lambda}$ (λ du matériau), nous allons calculer le champ dans un cristal photonique à l'aide du code d'éléments finis COMSOL®.

Nous reprenons le cristal photonique bidimensionnel étudié à la Section 9.2. Nous calculons le champ aux différents points représentés sur le diagramme de bandes de la figure 9.8. Nous l'éclairons en polarisation E_z . Ainsi, le vecteur \vec{k} du champ incident est uniquement porté par k_y , nous nous étudions donc la zone ΓX du diagramme.

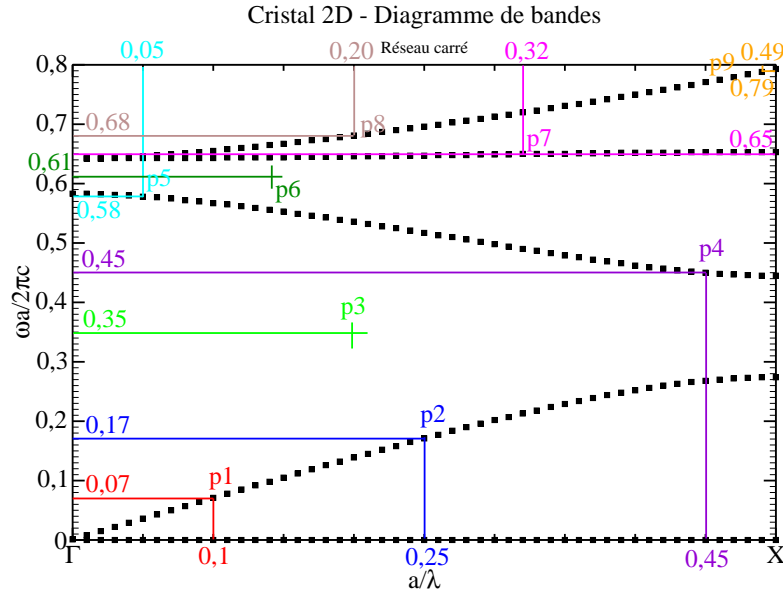


Figure 9.8 – Cristal photonique 2D - Diagramme de bandes en polarisation TM. Localisation des points d'étude

9.3.1 Bande 1 - Points p_1 et p_2

Le point p_1 correspond à une valeur de $\Omega = 0.07$. Nous observons sur la carte de champ électrique représenté sur la figure 9.9a que la longueur d'onde dans le matériau fait $10a$, nous avons donc $K = 0.1$, ce qui correspond bien au K prévu par le diagramme de bande.

Le point p_2 correspond à une valeur de $\Omega = 0.17$. Nous observons sur la carte de champ électrique représenté sur la figure 9.9b que la longueur d'onde dans le matériau fait $4a$, nous avons donc $K = 0.25$.

9.3.2 Gap 1 - Point p_3

Le point p_3 correspond à une valeur de $\Omega = 0.35$. Nous observons sur la carte de champ électrique représenté sur la figure 9.9c que le champ est atténué dans le matériau. Il n'y a donc pas de solution réelle pour K .

9.3.3 Bande 2 - Point p_4 et p_5

Le point p_4 correspond à une valeur de $\Omega = 0.45$. Nous observons sur la carte de champ électrique représenté sur la figure 9.9d que la longueur d'onde dans le matériau fait $2a$, nous avons donc $K = 0.5$. Le point p_5 correspond à une valeur de $\Omega = 0.58$. Nous observons sur la carte de champ électrique représenté sur la figure 9.9e que la longueur d'onde dans le matériau fait $38a$, nous avons donc $K = 0.026$.

9.3.4 Gap 2 - Point p_6

Le point p_6 correspond à une valeur de $\Omega = 0.61$. Nous observons sur la carte de champ électrique représenté sur la figure 9.9f que le champ est atténué dans le matériau. Il n'y a donc pas de solution réelle pour K .

9.3.5 Bande 3 - Point p_7

Le point p_7 correspond à une valeur de $\Omega = 0.65$. Nous observons sur la carte de champ électrique représenté sur la figure 9.9g que la longueur d'onde dans le matériau fait $7a$, nous avons donc $K = 0.14$.

9.3.6 Bande 4 - Point p_8 et p_9

Le point p_8 correspond à une valeur de $\Omega = 0.68$. Nous observons sur la carte de champ électrique représenté sur la figure 9.9h que la longueur d'onde dans le matériau fait $4a$, nous avons donc $K = 0.25$. Le point p_9 correspond à une valeur de $\Omega = 0.79$. Nous observons sur la carte de champ électrique représenté sur la figure 9.9i que la longueur d'onde dans le matériau fait $2a$, nous avons donc $K = 0.5$.

Nous observons que Ω correspond à la fréquence de propagation de l'onde dans le vide et que K correspond à la longueur d'onde spatiale dans le cristal. La bande interdite (Gap) se caractérise par la non-progression de l'onde incidente à la fréquence interdite. Néanmoins, nous avons pu observer une pénétration du champ sur les premières couches du cristal. Dans le cas d'un cristal ayant un faible nombre de couches, l'onde incidente peut traverser le cristal. Cette remarque est importante pour interpréter les coefficients de réflexion ou de transmission d'un cristal ayant un faible nombre de couche.

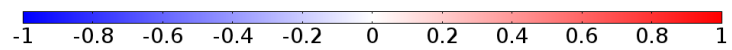
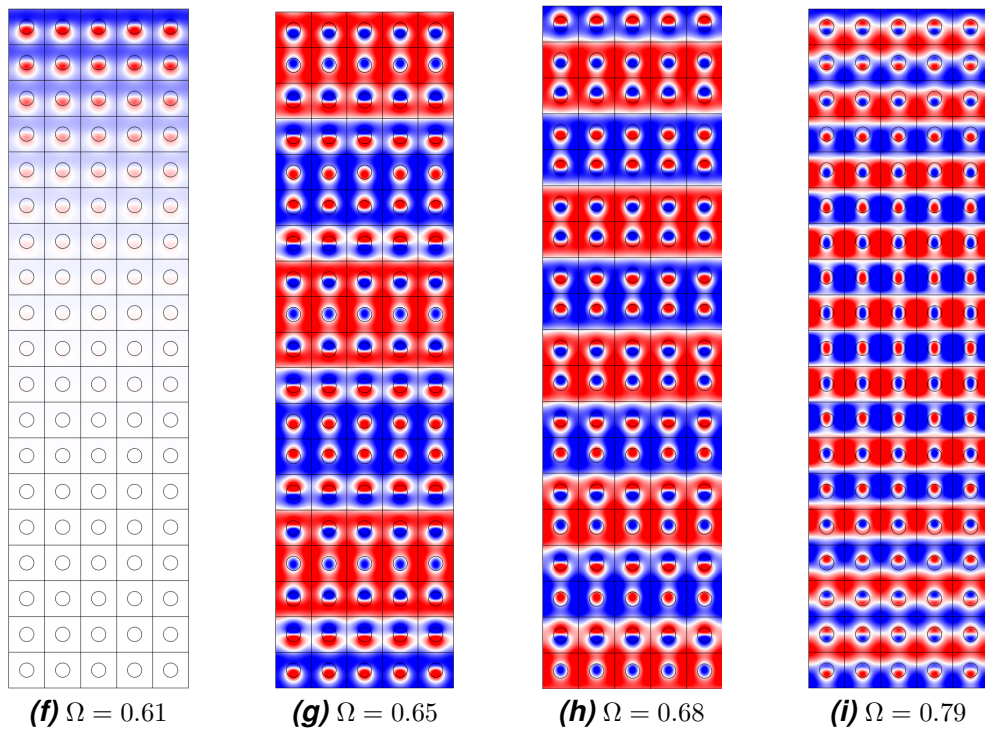
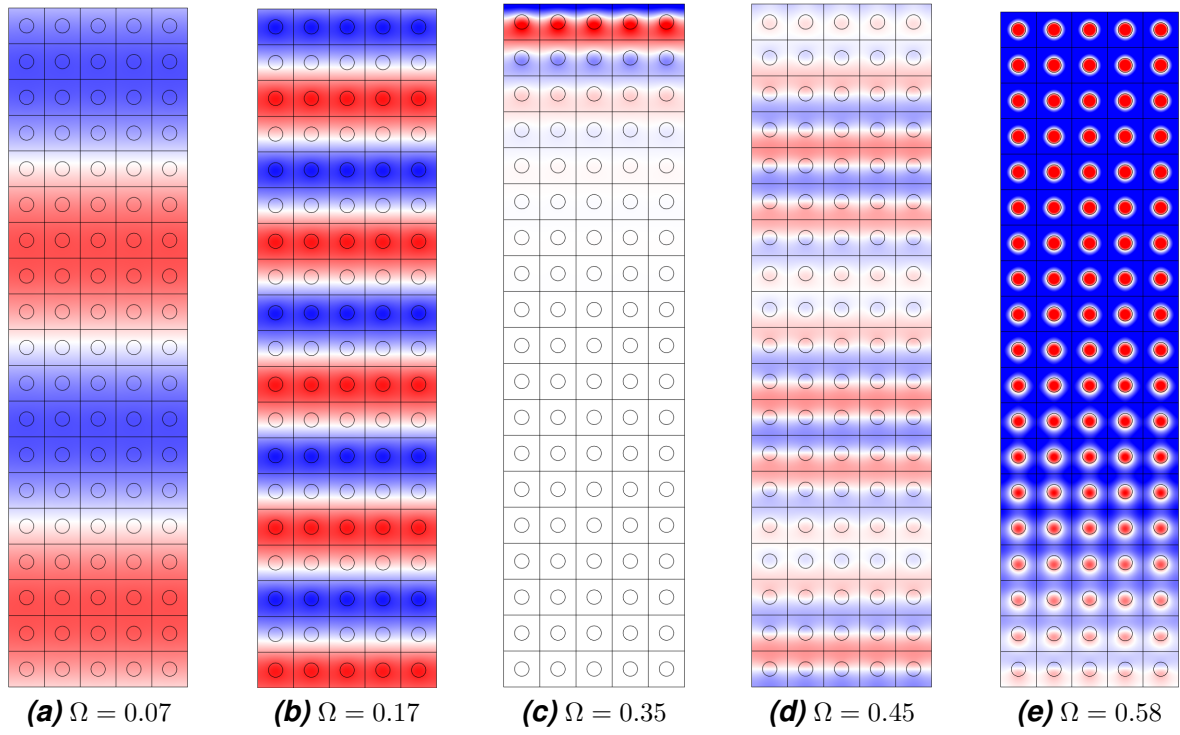


Figure 9.9 – Champ électrique pour diverses fréquences Ω

Chapitre 10

Étude des défauts dans un cristal photonique 2D

Le cristal photonique est un objet composé d'inclusions réparties périodiquement et d'une matrice qui les englobe. Ces deux constituants peuvent être affectés par des défauts.

De plus, le cristal photonique possède des bandes de fréquences particulières pour lesquelles un champ incident ne peut pénétrer dans le matériau : les bandes interdites. Néanmoins, pour établir ce régime, le cristal nécessite un nombre minimum de périodes d'épaisseur (dépendant du cristal photonique).

La méthode RECY permet d'estimer le champ diffusé par des objets ayant une fluctuation (au premier ordre) de propriétés (permittivité et/ou perméabilité). Il est également possible de transformer une variation de la taille des inclusions en fluctuation de propriétés si l'homogénéisation est possible.

Les défauts de taille des inclusions ont fait l'objet d'une analyse poussée [11, 13, 12] car ces défauts sont la clé d'un contrôle des ondes électromagnétiques. Cependant, les études restent cantonnées à ce contrôle et n'envisagent pas les défauts comme diffusant, au sens fluctuations d'un état idéal recherché. Elles montrent cependant que les défauts ont des états propres qui créent des résonances à l'intérieur du cristal.

C'est pourquoi nous avons procédé à une étude statistique via une méthode de Monte-Carlo pour l'étude de la polydispersité des inclusions et pour l'étude du retrait d'inclusions.

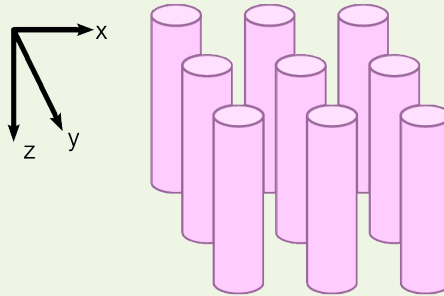
10.1 Nombre de périodes empilées pour l'obtention de la réflectivité maximale

Le nombre de périodes (en épaisseur) composant un cristal est un facteur déterminant pour la réflectivité. En effet, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, une partie de l'onde pénètre dans le cristal même dans une bande interdite (cf. Figures 9.9c et 9.9f). Ainsi, un cristal n'ayant qu'un faible nombre de périodes laissera passer le champ électrique même dans une bande interdite.

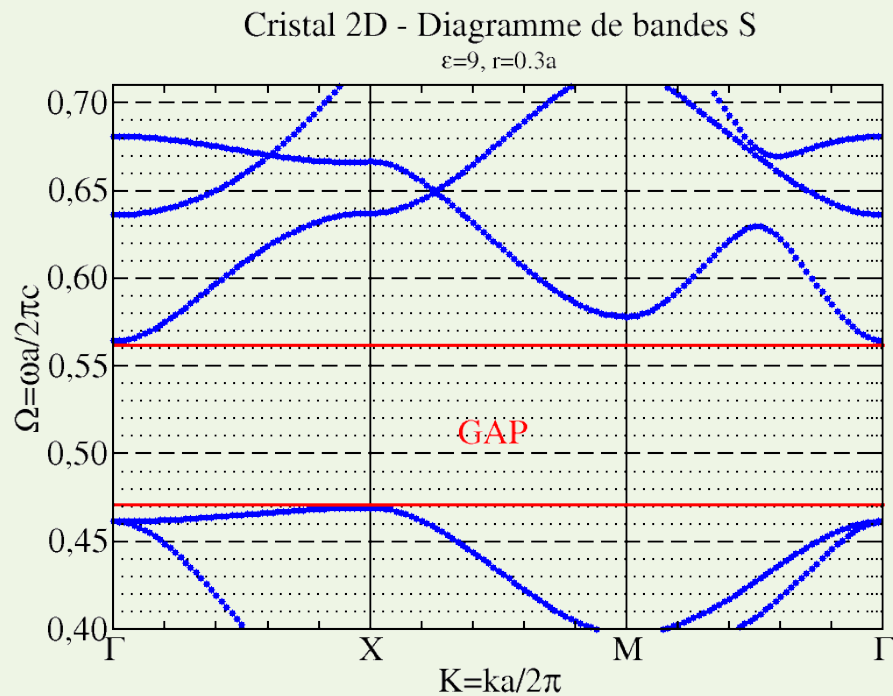
À l'aide du code d'éléments finis, COMSOL[®], nous avons étudié la réflexion du cristal d'étude pour un nombre de périodes empilées allant de 1 à 5. Nous obtenons les résultats présentés dans la figure 10.1.

Cristal photonique d'étude

Nous considérons un cristal photonique 2D semi-infini constitué de cylindres circulaires dans une matrice d'air. Les cylindres sont infinis selon la direction z mais il y a un nombre fini de couches selon la direction y . La dimension x (largeur) peut être finie ou périodisée (donc infinie). Le cristal est de période a selon les directions x et y . Les cylindres sont de **permittivité** $\varepsilon_r = 9$ et de **rayon** $r = 0.3a$. Ils sont répartis sur un réseau carré.



L'étude de la structure de bande que nous faisons en polarisation S ou E_z (le champ électrique est le long des cylindres) et en incidence normale ($i_0 = 0^\circ$), nous donne le diagramme de bande :



Nous observons que ce cristal possède une bande interdite large s'étalant de 0.46 à 0.56.

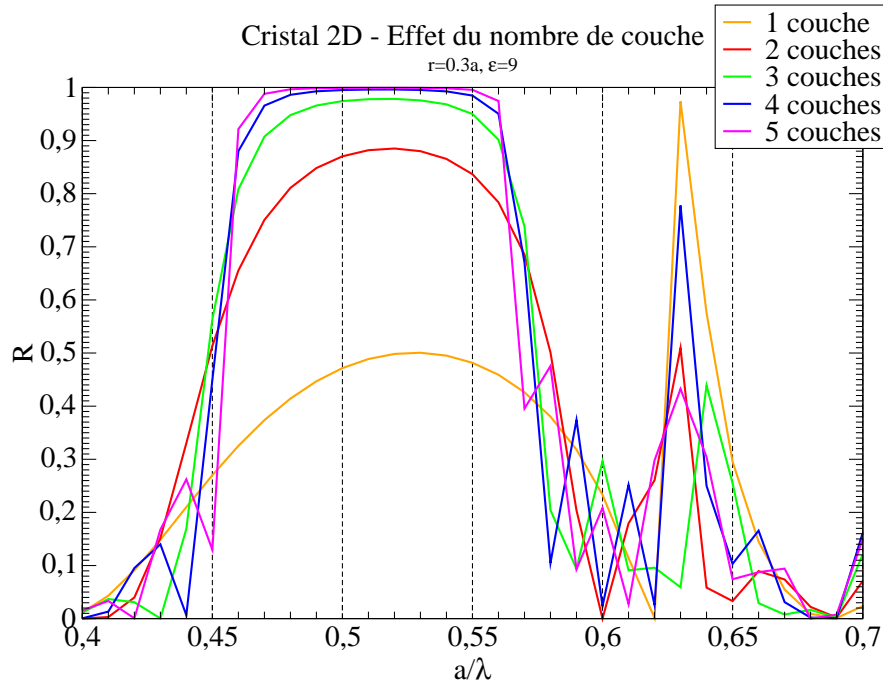


Figure 10.1 – Réflectivité en fonction du nombre de périodes.

La bande interdite est bien obtenue aux fréquences prévues par le diagramme de bandes (entre 0,46 et 0,56). Nous observons également que la réflectivité maximale n'est atteinte qu'à partir de 4 périodes ($R > 99\%$), néanmoins la réflectivité est déjà significative à 2 périodes ($R \approx 88\%$).

Il est possible à l'aide d'une expression analytique [53] d'estimer le nombre de périodes minimales pour la réflectivité maximale. La réflectivité maximale R s'exprime en fonction du nombre de périodes (nb) à l'aide de la fonction tangente hyperbolique (\tanh) :

$$R(nb) = \left[\tanh \left(\frac{nb}{a_1} \right) \right]^2 \quad (10.1)$$

où a_1 est un paramètre obtenu par fit sur les points calculés numériquement. Nous obtenons pour le cristal d'étude la figure 10.2.

Nous avons $a_1 = 1.14197$. $R(a_1)$ correspond à un coefficient de réflexion de 58%, en effet $\tanh(1)^2 = 0.58$. D'après [53], le paramètre a_1 correspond au nombre de périodes pénétrées par l'onde. La carte des champs dans le cristal à une fréquence de la bande interdite ($\Omega = a/\lambda = 0.51$) nous confirme cette interprétation (cf. Figure 10.3a).

Le champ électrique est fortement atténué dès la fin de la première période. Pour mieux évaluer cette atténuation, nous avons calculé la moyenne du champ sur plusieurs droites horizontales à travers le cristal correspondant chacune à un nombre de périodes. Nous obtenons la figure 10.3b.

Le champ suit une décroissance exponentielle selon la formule : $E(nb) = E(0) \exp(-a_2 nb)$ avec $a_2 = 0.814861$. Nous constatons que $E(a_1) = 0.6580$, ce qui correspond à une baisse d'environ 60% du champ. Cette valeur semble en accord avec la chute à 58% du coefficient de réflexion. La décroissance exponentielle du champ est caractéristique des milieux présentant des champs avec des vecteurs d'ondes k imaginaire. C'est ce que l'on appelle

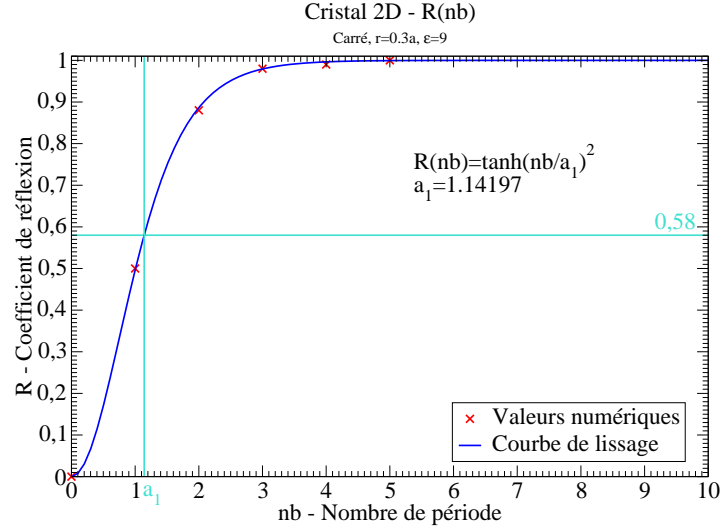


Figure 10.2 – Lissage de $R(nb)$.

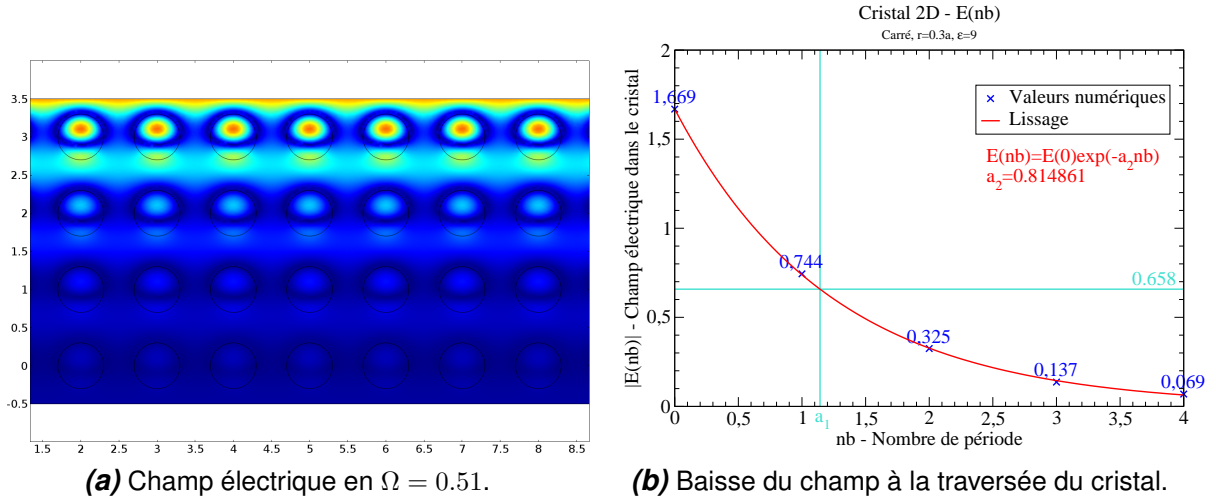


Figure 10.3 – Nombre de couches pénétrées.

des ondes évanescentes. Les cristaux photoniques présentent des vecteurs d'ondes complexes dans les bandes interdites. Ces bandes sont interdites uniquement pour des ondes propagatives (à k réel).

Les ondes étant évanescentes, le champ pénètrent en partie dans le cristal. Il faut donc un nombre de périodes suffisant pour interdire complètement la propagation des ondes. Cependant, nous n'avons pas été capables de justifier analytiquement la formule en tangente hyperbolique de $R(nb)$.

Néanmoins, nous avons pu confirmer cette formule sur d'autres cristaux, en une, deux et même trois dimensions (Voir Chapitre 11 pour les cristaux 3D). Nous avons ainsi obtenu par exemple pour des cristaux 1D (empilement diélectrique/air d'épaisseur $a/2$ chacun où a est la période), les résultats présentés à la figure 10.4.

Nous observons que le modèle correspond très bien pour les trois cristaux 1D choisis.

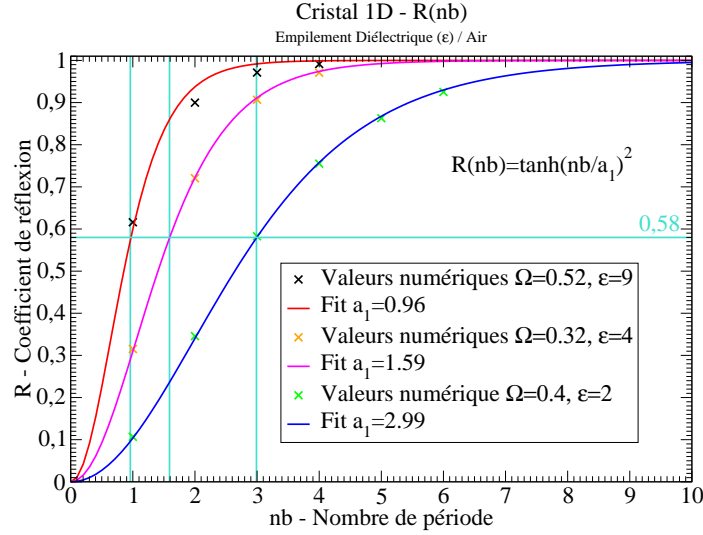


Figure 10.4 – Lissage de $R(nb)$ de cristaux 1D.

Nous avons ainsi démontré de façon phénoménologique la modélisation. Pour le cristal 1D, dans le cas d'un miroir de Bragg (où l'épaisseur des couches est adaptée), il est possible de démontrer la formule à l'aide des matrices de couches et de transferts, voir Annexe H.

10.2 Étude au premier ordre du champ diffusé par un défaut ponctuel de permittivité

La perturbation d'un des cylindres du cristal est qualifié de défaut ponctuel, même si la perturbation du cylindre crée un défaut le long d'une ligne selon la direction z (le long des cylindres). En effet, la propagation est considérée uniquement dans le plan $x0y$ (le vecteur d'onde \vec{k} n'a pas de composante z). Ainsi, la perturbation est bien localisé dans ce plan [11].

10.2.1 RECYn : évaluation exacte du champ diffusé

RECYn est une méthode de résolution exacte du champ diffusé dans un milieu réciproque. Comme RECY, RECYn utilise le théorème de réciprocité. Cependant à la différence de RECY, RECYn ne repose pas sur l'approximation du premier ordre. La source \vec{J}^n utilisée est donnée par l'équation (10.2).

$$\vec{J}^n = i\omega\epsilon_p\vec{E} \quad (10.2)$$

Le champ total \vec{E} n'est pas remplacé par le champ idéal \vec{E}^0 de la structure sans défaut. Le champ total contient le champ diffusé aussi RECYn prend en compte la diffusion d'ordre supérieur. La comparaison entre RECY et RECYn permet ainsi de mettre en évidence l'apport des ordres supérieurs. Le calcul de RECYn est comparée avec le calcul COMSOL.

Le cristal d'étude pour 3 périodes d'épaisseur et 10 périodes de large (fini) a été choisi pour ce calcul. Le défaut est placé au milieu du cristal. Le calcul de champ lointain de COMSOL nécessite un domaine de très grande taille autour de l'objet. Ce domaine doit être d'autant plus grand que le nombre de période en épaisseur est important. Cela engendre un coût mémoire et un temps de calcul très importants. RECYn qui ne nécessite que le champ dans le cristal n'a pas besoin de ce domaine de champ lointain, réduisant ainsi le temps de calcul. Cela rend pertinente l'utilisation de RECYn dans les cas où l'approximation au premier ordre est insuffisante et lorsqu'on souhaite s'affranchir des problèmes de calcul du champ lointain.

Nous obtenons pour une variation de 50% de la permittivité à la fréquence $\Omega = 0.44$ les résultats présentés en figure 10.5.

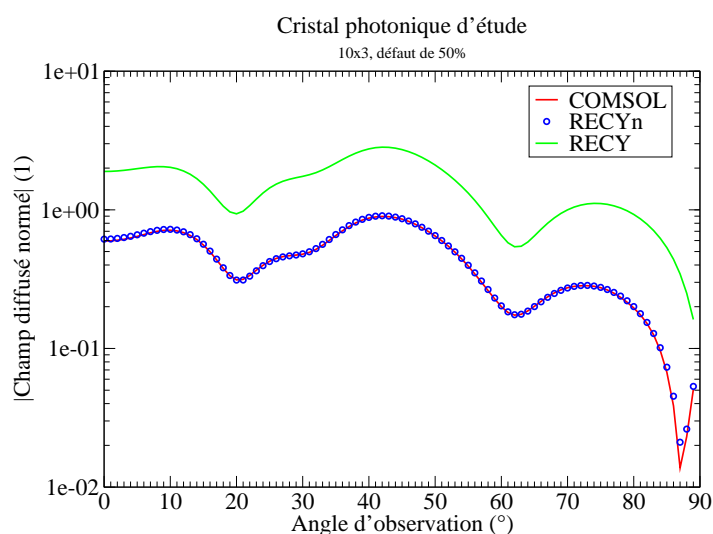


Figure 10.5 – Validation de RECYn pour un défaut de 50%.

On observe un excellent accord entre RECYn et COMSOL (2,27% d'erreur, due à la précision numérique). RECY n'est pas en accord (288,35% d'erreur), néanmoins l'évolution en angle du champ diffusé est similaire.

Nous avons montré que RECYn donne un résultat exact pour un temps réduit. Pour la suite de ce travail, RECYn constituera notre calcul de référence pour le champ diffusé.

10.2.2 RECY contre RECYn, la contribution du premier ordre

Nous considérons le cristal d'étude pour 5 périodes d'épaisseur et 11 périodes de large (fini). Un défaut ponctuel est placé au milieu du cristal. Nous calculons le champ diffusé pour des fluctuations de permittivité entre -88% et $+88\%$ avec RECY.

Nous obtenons alors pour une fréquence $\Omega = 0.50$ dans le gap les résultats présentés aux figures 10.6.

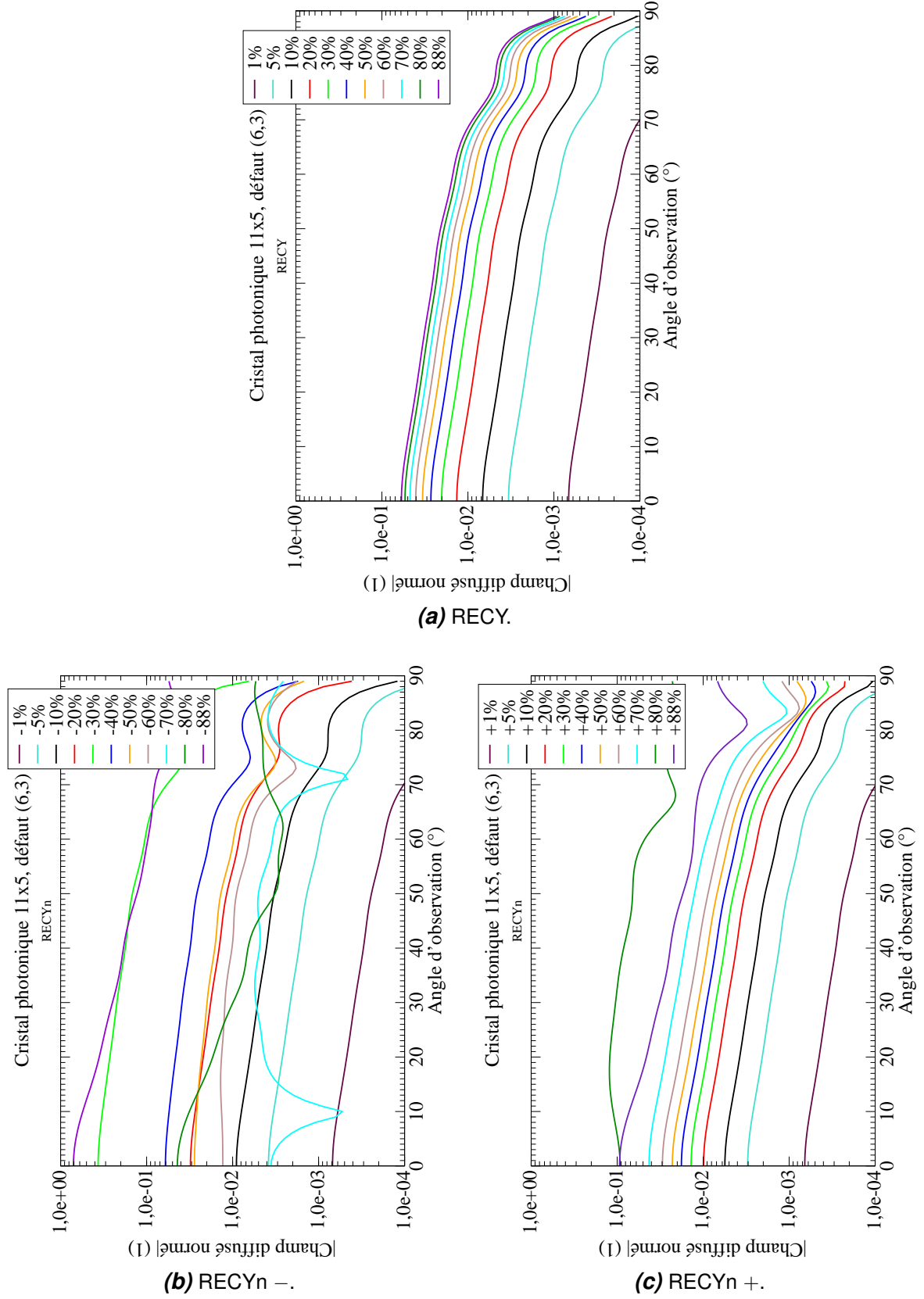


Figure 10.6 – Champ diffusé normé par un défaut ponctuel en (6, 3) de permittivité à la fréquence $\Omega = 0.5$ sur le cristal d'étude de 5 périodes d'épaisseur et 11 périodes de large (fini).

Nous remarquons que RECY donne de bons résultats pour des fluctuations inférieures à $\pm 10\%$. Pour cinq valeurs de pourcentages (-30% , -70% , -80% , -88% et $+80\%$), RECY ne donne ni le bon niveau, ni la bonne évolution angulaire du champ diffusé.

Pour -88% , -30% et $+80\%$, on peut observer un champ diffusé très significatif. Ils correspondent à des modes particuliers comme on peut le voir sur les cartes de champ des figures 10.7.

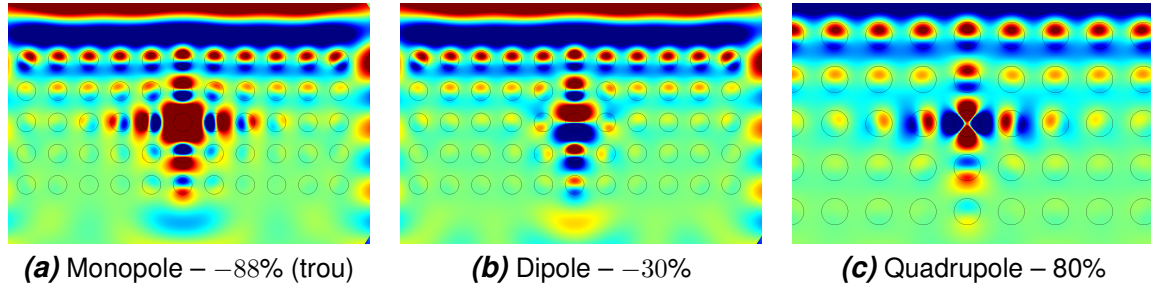


Figure 10.7 – Champ E_z par un défaut ponctuel en $(6, 3)$ de permittivité à la fréquence $\Omega = 0.5$ sur le cristal d'étude de 5 périodes d'épaisseur et 11 périodes de large (fini).

La présence de ses modes est un obstacle à l'approximation du premier ordre. En effet, le champ dans le cristal défectueux est très différent du champ dans le cristal parfait. Cependant, même en l'absence de mode particulier, RECY donne un champ diffusé entaché d'une erreur significative (cf. Tableau 10.1).

Défaut	Différence relative	Défaut	Différence relative
-10%	27.62%	$+10\%$	23.74%
-05%	13.33%	$+05\%$	12.37%
-01%	2.59%	$+01\%$	2.55%

Tableau 10.1 – Erreur relative de RECY sur un défaut ponctuel en $(6, 3)$ de permittivité à la fréquence $\Omega = 0.5$ sur le cristal d'étude de 5 périodes d'épaisseur et 11 périodes de large (fini).

RECY surestime le champ diffusé par une fluctuation de -70% et -80% montrent un champ diffusé. Cela indique probablement une interaction destructive (les champs s'annulent) du champ diffusé avec le cristal. Ce phénomène est l'opposé de ce qui se passe pour les modes où le champ diffusé est plus important. Dans ce dernier cas, l'interaction est constructive (les champs s'ajoutent).

Il faut aussi noter que la position des modes dépend de la fréquence. En effet, pour la fréquence : $\Omega = 0.55$, par exemple, les modes apparaissent à des pourcentages de fluctuations différents (cf. Figures 10.8).

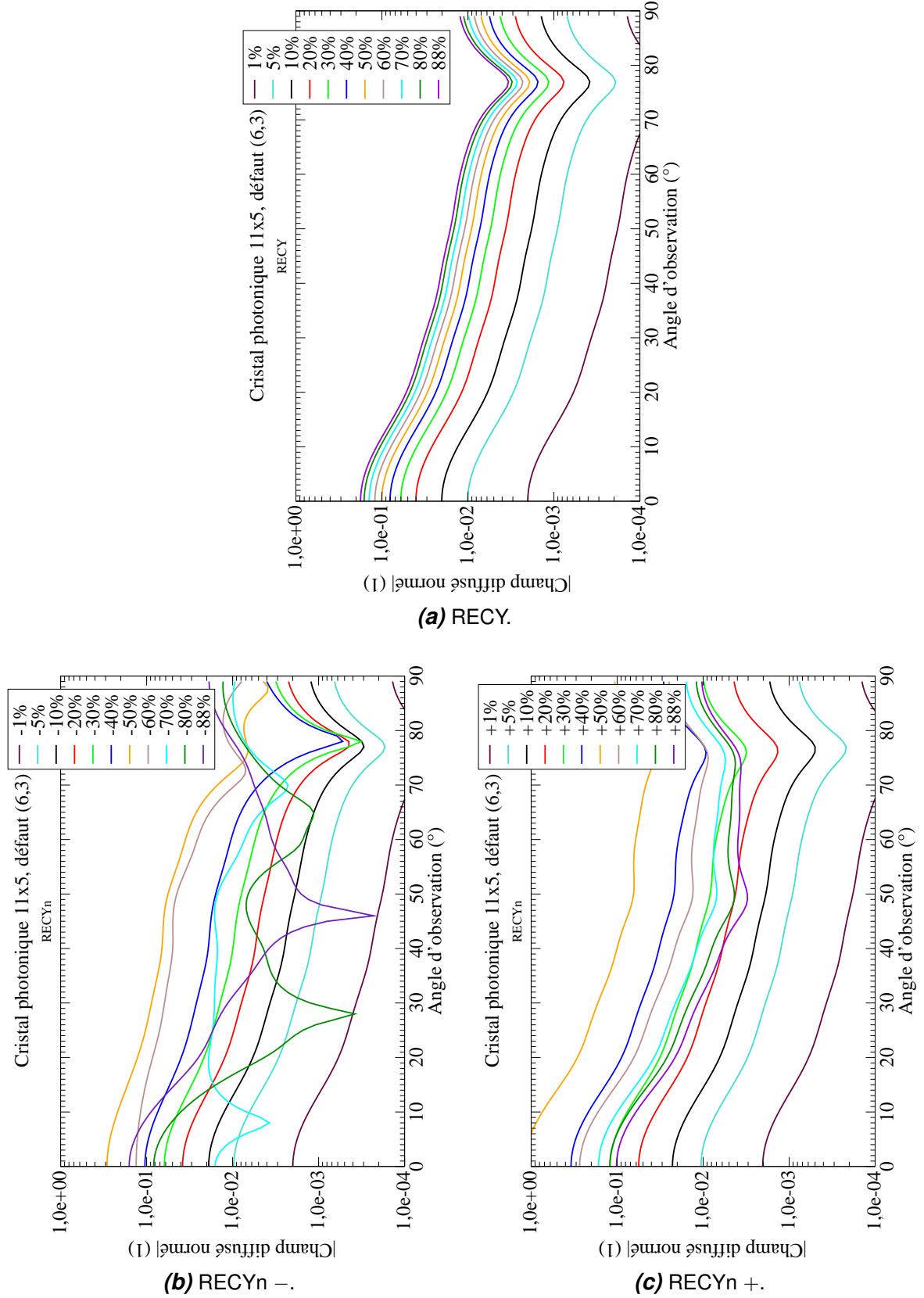


Figure 10.8 – Champ diffusé normé par un défaut ponctuel en (6,3) de permittivité à la fréquence $\Omega = 0.55$ sur le cristal d'étude de 5 périodes d'épaisseur et 11 périodes de large (fini).

On remarque que pour cette fréquence le champ diffusé est également bien estimé par RECY pour des fluctuations inférieures à $\pm 10\%$. Le mode à -88% a disparu, l'interaction est maintenant destructive (le champ diffusé est maintenant inférieur à celui prévu par RECY contrairement à la fréquence $\Omega = 0.5$ où il était supérieur). On constate également que les fluctuations de -50% et $+50\%$ font apparaître des modes (cf. Figures 10.9).

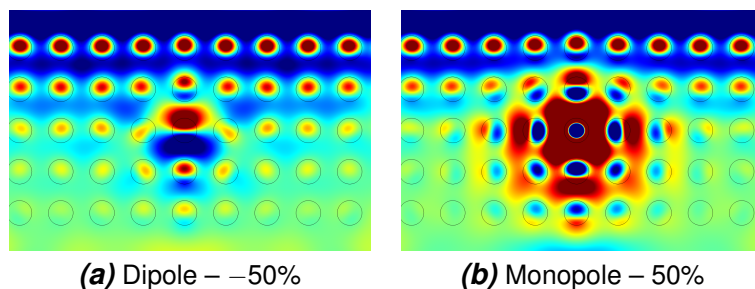


Figure 10.9 – Champ E_z par un défaut ponctuel en $(6, 3)$ de permittivité à la fréquence $\Omega = 0.55$ sur le cristal d'étude de 5 périodes d'épaisseur et 11 périodes de large (fini).

A la fréquence $\Omega = 0.55$, l'erreur de RECY pour les faibles fluctuations est réduite par rapport à $\Omega = 0.5$ (cf. Tableau 10.2).

Défaut	Différence relative	Défaut	Différence relative
-10%	5.62%	$+10\%$	9.53%
-05%	2.99%	$+05\%$	4.08%
-01%	0.67%	$+01\%$	0.71%

Tableau 10.2 – Erreur relative de RECY sur un défaut ponctuel en $(6, 3)$ de permittivité à la fréquence $\Omega = 0.55$ sur le cristal d'étude de 5 périodes d'épaisseur et 11 périodes de large (fini).

Cette dépendance des erreurs avec la fréquence nous permet de penser qu'il existe des fréquences où le champ diffusé peut être mal évalué par RECY même pour de faibles fluctuations.

L'évolution du champ diffusé en fonction du pourcentage de fluctuation dans le spéculaire ($\theta = 0^\circ$) pour les deux fréquences est affiché aux figures 10.10.

Nous remarquons que RECY évolue continûment avec le pourcentage de fluctuation contrairement à RECYn.

Pour conclure, RECY peut être adaptée pour le calcul de champ diffusé d'un cristal photonique si les fluctuations sont faibles. Ici, pour les deux fréquences choisies, la fluctuation ne doit pas dépasser $\pm 10\%$. Néanmoins, des modes peuvent apparaître même pour ces faibles valeurs de fluctuation à d'autres fréquences. Il est donc préférable d'étudier la diffusion d'un cristal photonique par des calculs exacts plutôt que par un calcul au premier ordre.

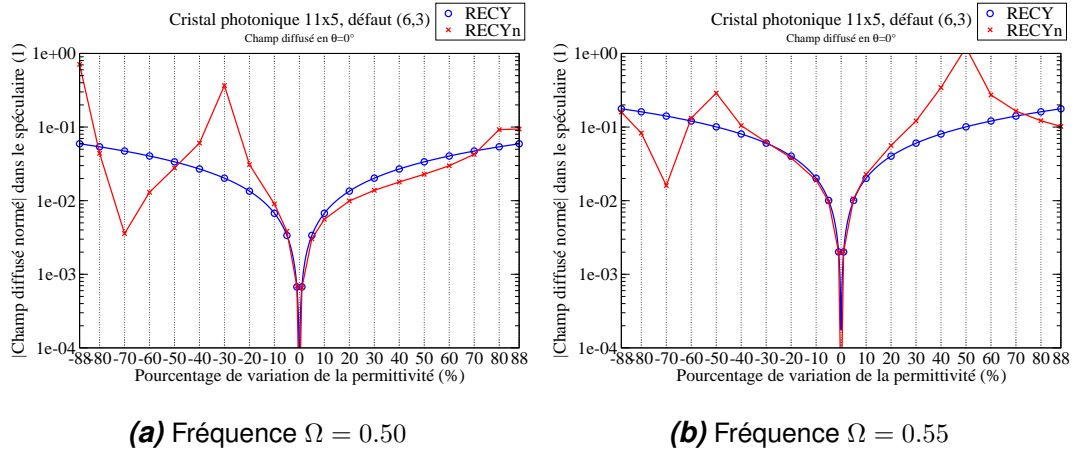


Figure 10.10 – Champ diffusé par un défaut ponctuel en (6, 3) de permittivité sur le cristal d’étude de 5 périodes d’épaisseur et 11 périodes de large (fini) dans le spéculaire ($\theta = 0$).

10.3 Localisation des champs dans les défauts ponctuels

Comme nous l’avons remarqué dans les cas précédents, la perturbation d’un des cylindre du cristal peut introduire des états dans la bande interdite. Cependant, les modes ainsi créés sont évanescents. Le champ du mode de défaut décroît donc exponentiellement depuis le défaut, confinant ainsi le champ dans le défaut, d’où la notion de localisation [11].

10.3.1 Défaut de permittivité

Il est important pour rester dans les limites de validité de RECY de déterminer les modes liés aux défauts. Nous cherchons donc à voir pour quelle fréquence Ω et pour quelle fluctuation sont placés les modes. Nous calculons alors la réflectivité (en intensité) du cristal d’étude de 5 périodes d’épaisseur et 11 période de large (périodisé). Un défaut ponctuel est placé au milieu du cristal (en (6,3)) avec des fluctuations allant de 0 à -88% de la permittivité. Le 0 correspond au cristal sans défaut, et le 0.88 correspond au retrait du cylindre (la permittivité est celle de la matrice). Nous obtenons la figure 10.11.

On observe des modes localisés à l’intérieur de la bande interdite comme à l’extérieur de celle-ci. Des états couvrent la bande interdite en partant de la fréquence $\Omega = 0,45$ et une fluctuation de 12% jusqu’à $\Omega = 0,46$ et une fluctuation de 62% . Néanmoins, il ne semble pas y avoir d’état dans la bande interdite pour des fluctuations inférieures à 10% . RECY semble donc pouvoir être appliqué pour ces faibles fluctuations. Il faut cependant se rappeler les pourcentages d’erreurs importants obtenus précédemment. De plus la fluctuation de permittivité utilisée dans ce calcul n’est pas très représentative des défauts présents dans les cristaux photoniques expérimentaux où les fluctuations de taille sont majoritaires. L’exploitation des calculs présentés à la figure 10.11 pour justifier l’utilisation de RECY est donc conditionnée par deux hypothèses : l’approximation du premier ordre d’une part et l’hypothèse d’homogénéisation pour transformer un défaut

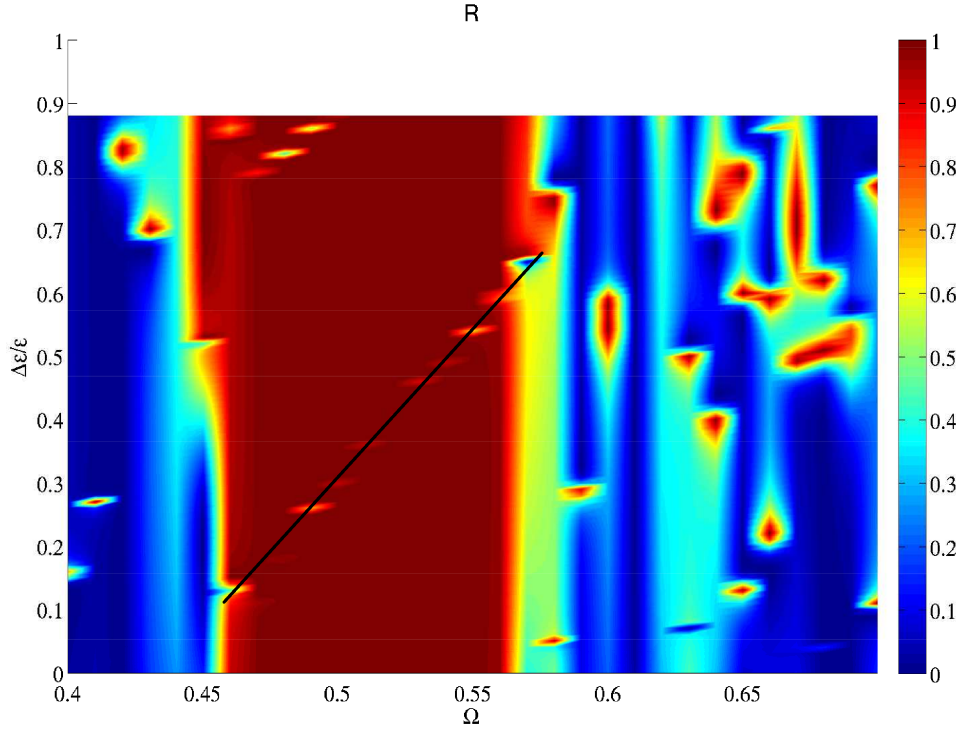


Figure 10.11 – Réflectivité du cristal d'étude de 5 périodes d'épaisseur et 11 périodes de large (périodisé) avec la fluctuation de la permittivité du cylindre en (6, 3) depuis 0 l'état parfait à 0.88 le retrait du cylindre.

de taille en défaut de permittivité d'autre part.

10.3.2 Défaut de rayon

Afin d'éviter l'hypothèse d'homogénéisation, nous avons réalisé le même calcul qu'en Section 10.3.1 pour des fluctuations de taille. Pour le même cristal d'étude (5 périodes d'épaisseur et de 11 périodes de largeur périodisé), le rayon d'un cylindre de la période du milieu varie de $\Delta Rayon/Rayon = [0, 0.99]$. Nous obtenons la figure 10.12 où le 0 correspond au cristal parfait et le 1 au retrait du cylindre.

On observe, comme pour les fluctuations de permittivité des modes localisés sur toute la gamme de fréquence. Toutefois des modes qui apparaissent dès 5% de fluctuation. Plusieurs baisses importantes de la réflectivité sont à noter dans la bande interdite notamment à 9% et 21% où la réflectivité devient quasi-nulle. Les états localisés sont cependant positionnés dans la bande interdite pour une plage de fluctuation de rayon (entre 9% et 40%, voir figure 10.12) plus faible que la plage de fluctuation de permittivité (entre 12% et 62%, voir figure 10.11). RECY peut donc être utilisée pour des pourcentages de fluctuation faible à des fréquences qui ne présentent pas de mode.

Remarque Ces cartes sont obtenues pour un nombre de période d'épaisseur particulier et une position particulière du défaut, ce qui peut influencer sur la fréquence et le pourcentage du mode de défaut.

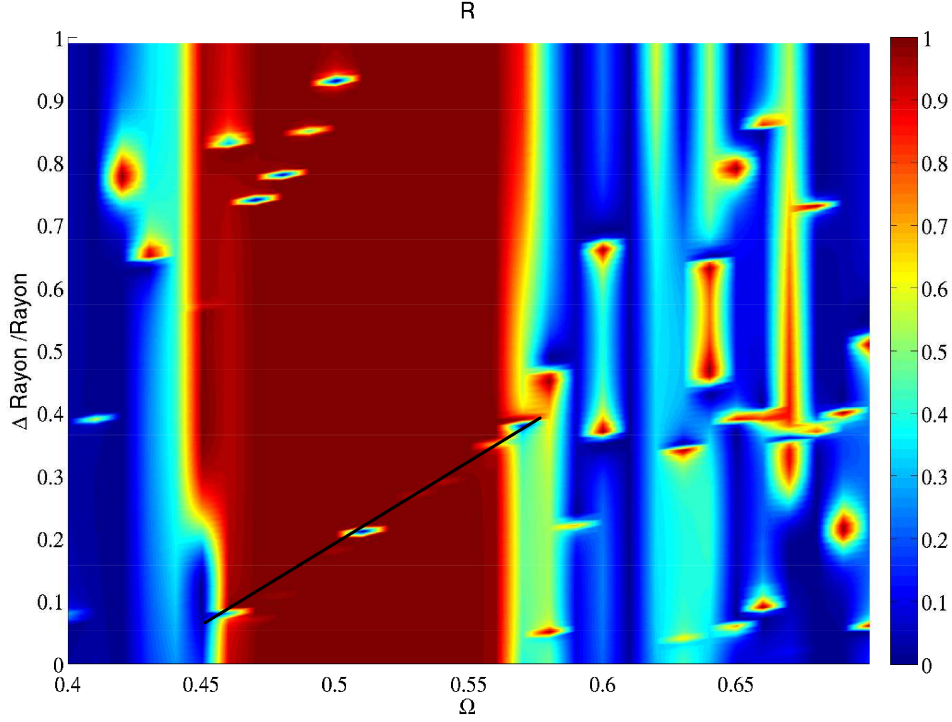


Figure 10.12 – Réflectivité du cristal d'étude de 5 périodes d'épaisseur et 11 périodes de large (périodisé) avec la fluctuation du rayon du cylindre en (6, 3) depuis 0 l'état parfait à 1 le retrait du cylindre.

10.4 Étude au premier ordre du champ diffusé par un tirage de défauts ponctuel de permittivité

Les cristaux présentent généralement un ensemble de défauts qui peuvent interagir. Cette interaction peut ajouter des contributions d'ordre supérieur non prises en compte par RECY. Pour illustrer ce phénomène, le champ diffusé aux fréquences $\Omega = 0.44$ et $\Omega = 0.5$ a donc été calculé pour un tirage de défaut comme représenté sur la figure 10.13 pour le cristal d'étude de 5 périodes d'épaisseur et 11 périodes de large (fini). RECY est comparé avec RECYn qui correspond à la solution exacte.

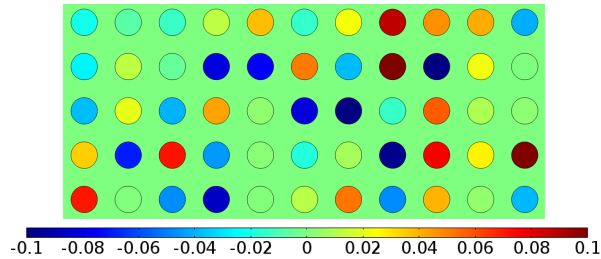


Figure 10.13 – Tirage de défaut du cristal d'étude de 5 périodes d'épaisseur et 11 périodes de large (fini).

Les résultats de ce calcul sont représentés sur les figures 10.14a et 10.14b.

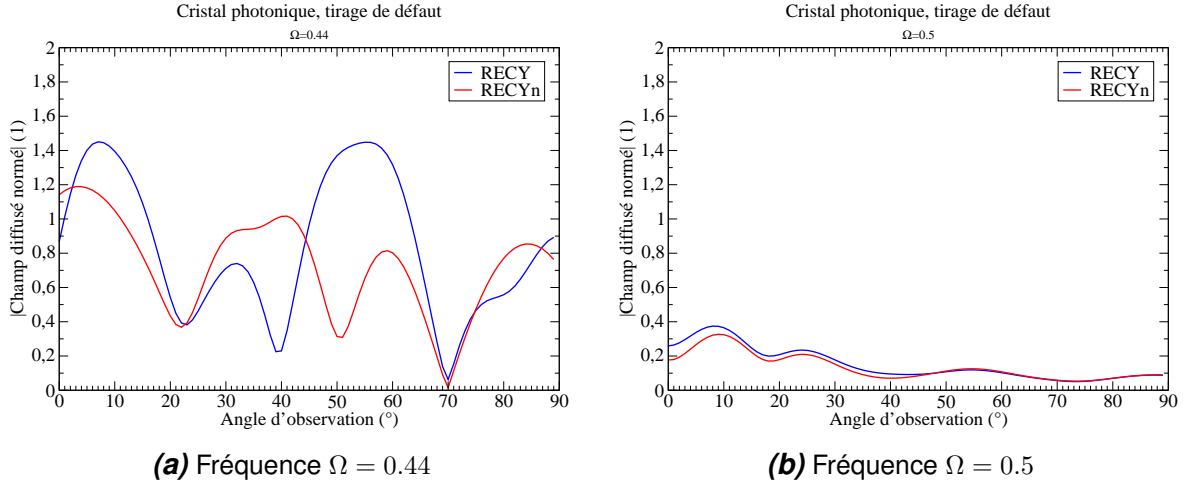


Figure 10.14 – Champ diffusé par un tirage de défaut de permittivité sur le cristal d’étude de 5 périodes d’épaisseur et 11 périodes de large (fini).

RECY ne donne pas la bonne dépendance angulaire du champ diffusé pour la fréquence de $\Omega = 0.44$ et l’erreur moyenne est ainsi de 53.65%. Pour $\Omega = 0.5$, RECY donne une bonne approximation du champ diffusé mais l’erreur est toutefois de 12.43%. Cette erreur est trop importante pour envisager l’étude statistique d’un cristal polydisperse. En effet, les erreurs vont s’ajouter à chaque tirage. C’est pourquoi, nous avons procédé à l’étude d’un cristal polydisperse par une méthode de Monte-Carlo.

10.5 Étude statistique de défauts de taille des cylindres

La polydispersité (variation bornée de taille des cylindres) est un défaut fréquemment rencontré dans les cristaux fabriqués. Ces derniers possèdent un très grand nombre de cylindres qui ne peuvent malheureusement pas être entièrement représentés lors d’un calcul pour des raisons de coût. Pour résoudre ce problème, l’approche statistique est un bon compromis.

Pour étudier concrètement la polydispersité sur un domaine raisonnable, nous avons fait un grand nombre de tirages que nous avons ensuite moyenné en retirant la partie non-cohérente.

$$R_{moy} = \langle |r|^2 \rangle - |\langle r \rangle|^2 \quad (10.3)$$

où $\langle . \rangle$ représente la moyenne et r représente le coefficient de réflexion complexe (en champ).

Les absences de cylindres étant également des défauts fréquemment rencontrés dans les cristaux fabriqués, nous avons donc comme pour la polydispersité mené une étude statistique de la présence des trous. Pour rester dans une approche diffusion, la probabilité de présence de trou n’excède pas 10%.

10.5.1 Retrait de cylindres

Pour étudier statistiquement le retrait de cylindres, nous considérons le cristal d'étude avec 4 périodes d'épaisseur et 10 périodes de large (soit periodique, soit fini).

Trois cylindres ont été retirés (soit 7.5% de trous). Leur position est choisie de façon aléatoire. La moyenne (cf. Équation 10.3) est réalisée sur 100 et 1000 tirages. Celles-ci étant similaires, nous ne présentons que la réflectivité pour 100 tirages (cf. Figure 10.15).

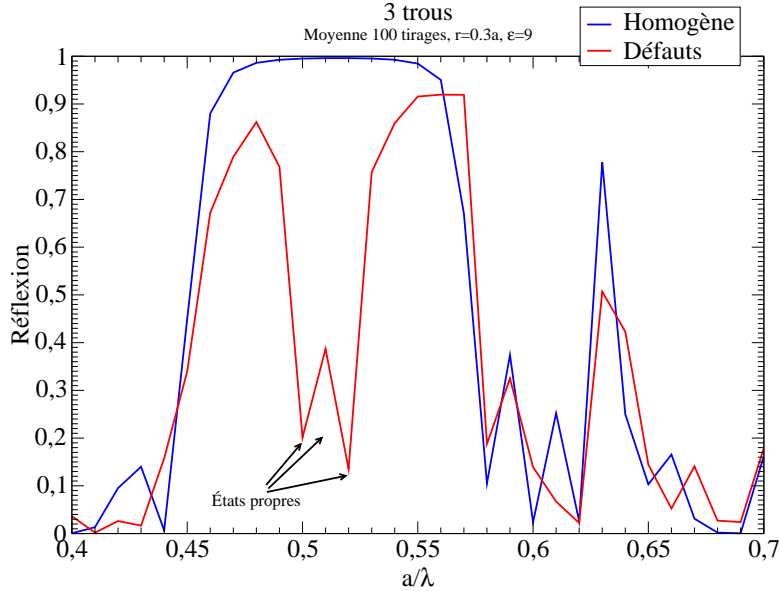


Figure 10.15 – Réflectivité (moyenne obtenu pour 100 tirages) du cristal photonique d'étude de 4 périodes d'épaisseur et 10 périodes de large (périodique) pour le cristal sans défaut et le cristal avec 7.5% de trous.

Le retrait de trois cylindres sur le cristal engendre des états propres localisés aux fréquences (a/λ) valant respectivement 0.5, 0.51 et 0.52. L'étude précédente et la figure 10.7a, nous indique que le retrait d'un seul cylindre résonne à la fréquence 0.5 où se situe une baisse de réflectivité. Cette baisse est donc due à la résonance d'un trou seul. Une autre baisse de réflectivité se produit en revanche à une fréquence non prédite par l'étude d'un défaut isolé. On peut s'attendre à ce que celle-ci soit liée à une résonance couplée de plusieurs défauts.

Nous constatons sur la figure 10.7a que la cavité créée par le retrait d'un cylindre permet au champ électrique de traverser le cristal en raison de sa résonance bien qu'à cette fréquence le cristal parfait soit complètement réflecteur.

Cette remarque est confirmée par le calcul d'un cristal fini (cf. Figure 10.16) : la différence entre le champ réfléchi par le cristal parfait et celui réfléchi par le cristal défectueux est négative à la fréquence 0.5 et à l'angle spéculaire en réflexion (90°). Il est positif à l'angle de transmission (270°). Une partie du champ a donc traversé le cristal et le reste a été diffusé sur les autres angles.

L'absence d'inclusion dans le cristal est à l'origine d'états propres supplémentaires. Ces états présents dans le gap engendrent une baisse localisée de réflectivité jusqu'à 90%. On peut également observer une baisse d'environ 15% de la réflectivité dans le gap en

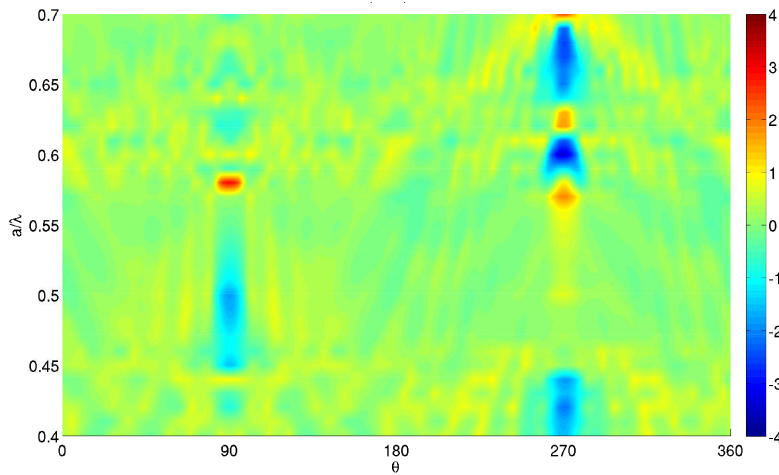


Figure 10.16 – Champ diffusé (moyenne obtenu pour 100 tirages) par 7.5% de trous du cristal photonique d'étude de 4 périodes d'épaisseur et 10 périodes de large (fini).

dehors des fréquences de modes propres. Cette baisse est due aux pertes par diffusion mentionnées plus haut.

10.5.2 Polydispersité du rayon des cylindres

Pour l'étude statistique de la polydispersité, nous considérons le cristal d'étude avec 5 périodes d'épaisseur et 11 périodes de large (soit périodique, soit fini). Le tirage du rayon des cylindres sera représentatif d'une granulométrie gaussienne. L'histogramme des tirages est représenté sur la figure 10.17.

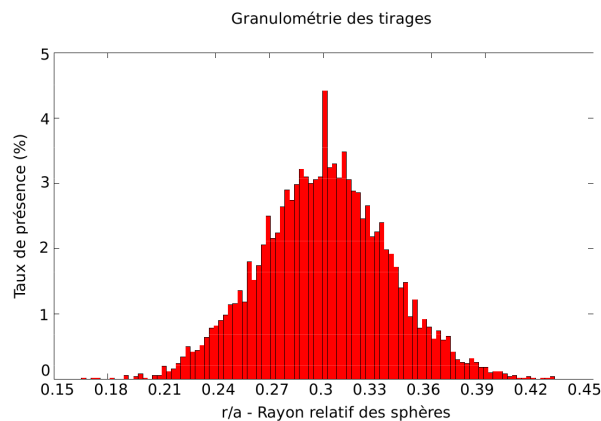


Figure 10.17 – Granulométrie de l'ensemble des tirages pour l'étude de la polydispersité du cristal d'étude.

L'écart type de cette distribution est de 0.12. Le cristal est donc de polydispersité moyenne de 12%. Nous obtenons pour cette granulométrie les résultats représentés sur la figure 10.18.

Nous observons que la granulométrie provoque une baisse homogène de la réflectivité sur le gap d'au moins 30%. Cette baisse continue sans présence de pic, signifie qu'il n'y a probablement pas de mode propre localisé. Néanmoins, nous avons vu à la section 10.3.2

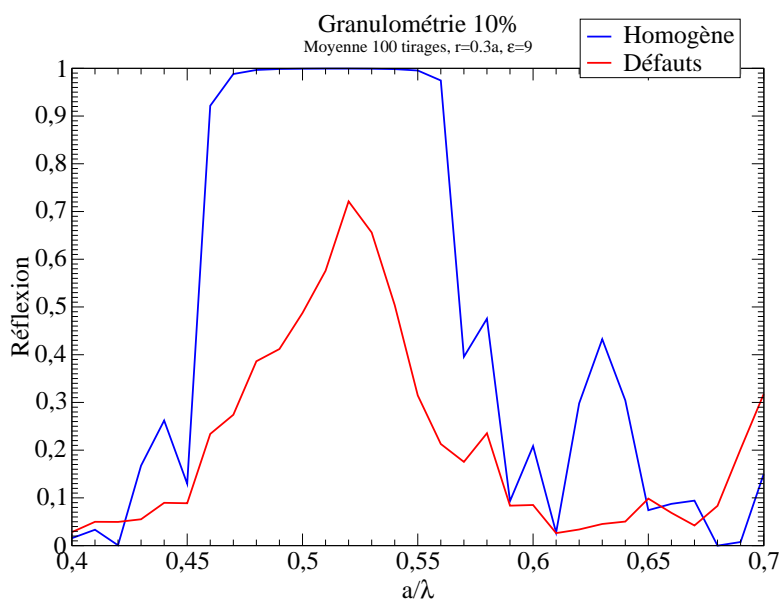


Figure 10.18 – Réflectivité (moyenne obtenu pour 100 tirages) du cristal photonique d'étude de 5 périodes d'épaisseur et 11 périodes de large (périodique) pour le cristal sans défaut et le cristal dont les rayons des cylindres sont polydisperses.

que les variations de rayon d'une inclusion pouvait être à l'origine de modes propres localisés d'amplitude faible pour des variations de rayons n'excédant pas 50%. La polydispersité contribue donc en une somme collective de défaut sur l'ensemble des modes propres visibles dans le gap sur la figure 10.12. En effet, nous avons vu que l'ensemble des modes propres localisés liés à une fluctuation de rayon particulière couvrait l'ensemble des fréquences de la bande interdite.

L'étude sur le cristal fini (cf. Figure 10.19) nous indique que la chute de réflectivité est due à une perte par diffusion.

En effet, nous observons que le champ diffusé n'est pas ou peu augmenté en transmission mais plutôt réparti sur l'ensemble des directions.

La baisse importante de réflectivité pour une granulométrie de faible dispersité (10% de fluctuation du rayon des inclusions) montre la nécessité d'avoir une monodispersité la plus juste possible, afin de limiter les pertes par diffusions due à la fluctuation de taille des inclusions.

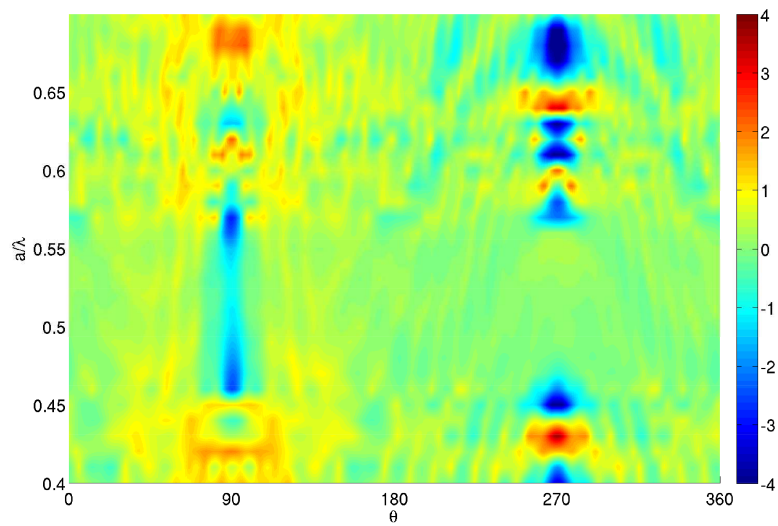


Figure 10.19 – Champ diffusé (moyenne obtenu pour 100 tirages) par polydispersité des rayons du cristal photonique d'étude de 5 périodes d'épaisseur et 11 périodes de large (fini).

Chapitre 11

Analyse de cristaux photoniques 3D fabriqués pour l'optimisation de la réflectivité

Le CEA Le Ripault fabrique des opales, cristaux photoniques à base de sphères de silice, à l'aide d'un procédé sol-gel. Une des applications potentielles de ces matériaux est la réalisation de réflecteurs pour les lasers femtosecondes. Les premières réalisations ont présenté des performances en réflexion moins bonnes que celles attendues. La motivation des travaux présentés dans ce chapitre est d'une part d'analyser ces performances expérimentales en les confrontant à un calcul numérique, d'autre part de diagnostiquer l'origine éventuelle affectant la réflectivité de nos réalisations.

11.1 État de l'art de la fabrication d'opale

Les opales artificielles sont, par analogie aux opales naturelles (cf. Figure 11.1), formées de sphère de silice (SiO_2) organisées selon un réseau cubique face centré (CFC).

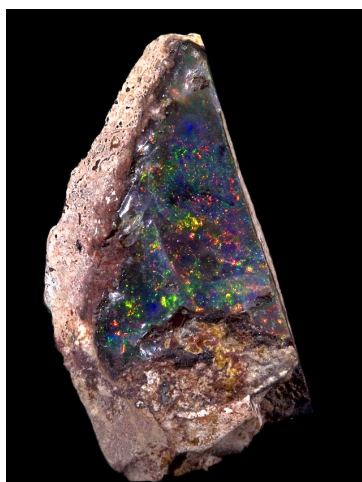


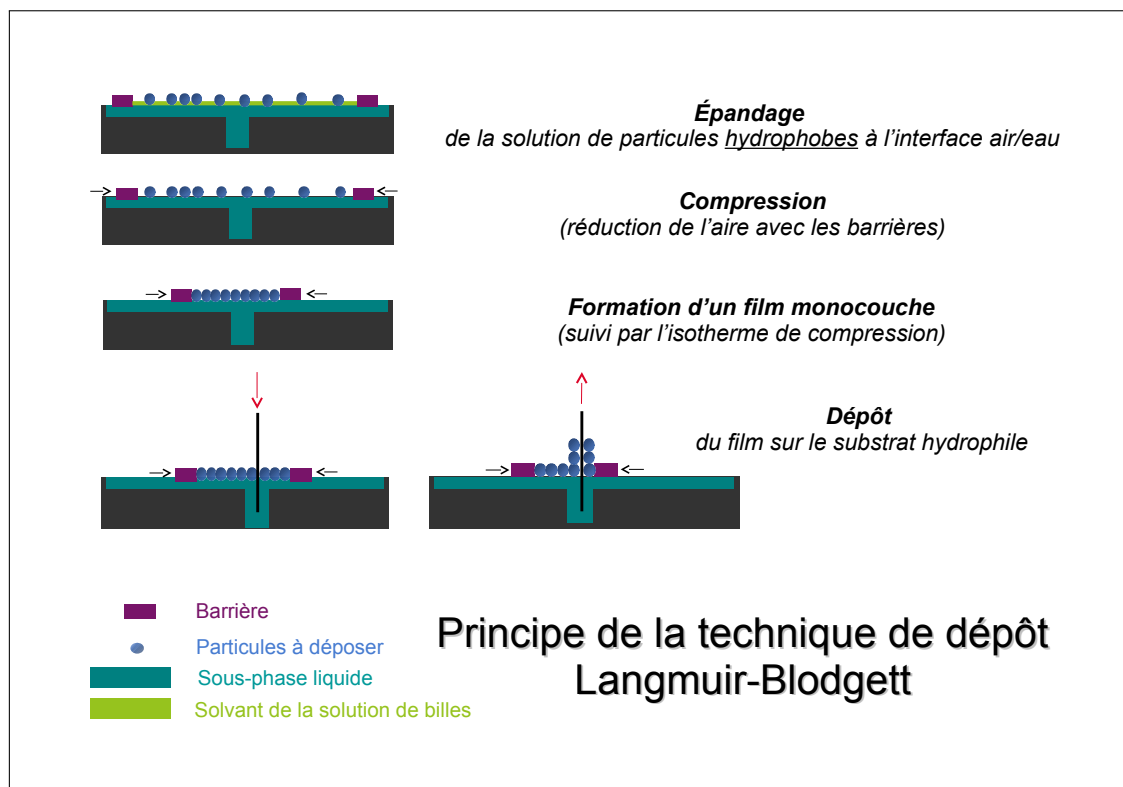
Figure 11.1 – Photographie d'une opale [54].

Il existe de nombreuses méthodes pour concevoir les opales artificielles, l'article [55]

fait une revue relativement complète de ces techniques. Deux techniques se distinguent particulièrement : l'holographie [56] et l'auto-assemblage de colloïde [57] (suspension de nanoparticules).

L'holographie est une technique qui permet de faire des opales inverses de très grandes qualité. Cette technique utilise des lasers pour "graver" dans le matériau la structure désirée. Néanmoins, c'est une technique lente et coûteuse.

L'auto-assemblage est une technique qui laisse les sphères de silice (SiO_2) sédimenter toute seule selon un réseau CFC, assemblage naturel des sphères [58]. Les sphères sont fabriquées la plupart du temps par la méthode de Stöber-Fink-Bohn [59]. L'auto-assemblage se décline en diverses méthodes : la sédimentation par gravité [58, 60], la convection, la centrifugation et la capillarité [61]. La cristallisation verticale, présentée à la figure 6 de [55], est basée sur la capillarité. Le principe de cette méthode est d'immerger un substrat dans une solution colloïdale puis de le relever lentement (100 nm/s). Les sphères s'agglomèrent alors sur le substrat en un arrangement CFC. Cette méthode est similaire à celle de Langmuir-BlodgettLangmuir-Blodgett que nous avons utilisé pour la fabrication de nos cristaux.



La technique du Langmuir-Blodgett présente trois intérêts majeurs :

- le contrôle de la compacité du film monocouche qui permet de garantir une bonne organisation,
- le dépôt qui s'effectue couche par couche (c'est-à-dire période par période en épaisseur),
- la possibilité de faire des dépôts de grande dimension.

11.2 Procédé d'élaboration

Nos cristaux photoniques sont fabriqués par Florence Benoit dans le cadre de sa thèse [62] à l'aide de particules de silice ($n = 1.43$) déposées par la technique de Langmuir-BlodgettLangmuir-Blodgett. Les particules de silice (cf. Figure 11.2a) sont fabriquées par voie sol-gel à l'aide de la synthèse de Nosawa [63] (Stöber ensementer). L'étude granulométrique (cf. Figure 11.2b) des sphères fabriquées nous indique un rayon moyen de 517.17 ± 111.00 nm, soit une polydispersité de 21%.

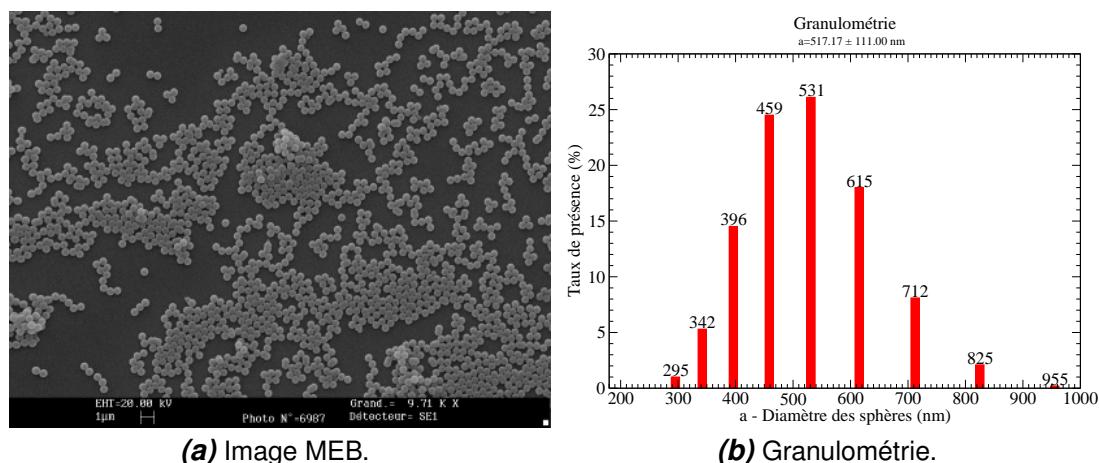


Figure 11.2 – Sphères de silice fabriquées.

Des empilements de 1, 4 et 8 périodes d'épaisseur (couches) sont réalisés. Nous observons sur les images MEB (cf. Figures 11.3a et 11.3b), que le nombre de couches est bien maîtrisé par la méthode. Les défauts principalement observés sont des lacunes (trous) et des amas de particules. Néanmoins, la structure générale (CFC) semble assez bien respectée.

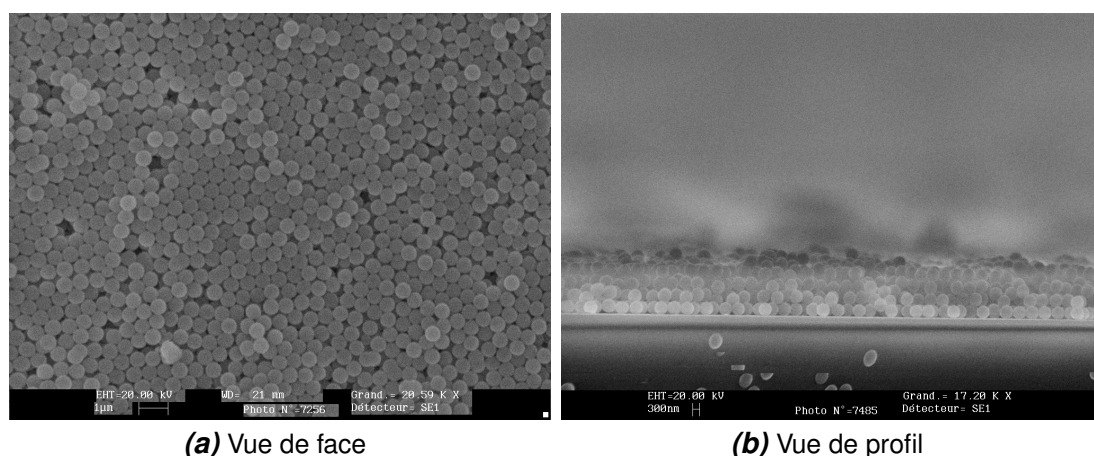


Figure 11.3 – Images MEB d'un empilement de 4 couches.

11.3 Mesures expérimentales

La réflectivité de nos échantillons est ensuite analysée. Les mesures de réflectivité sont présentées figure 11.4 pour un exemple de réalisation.

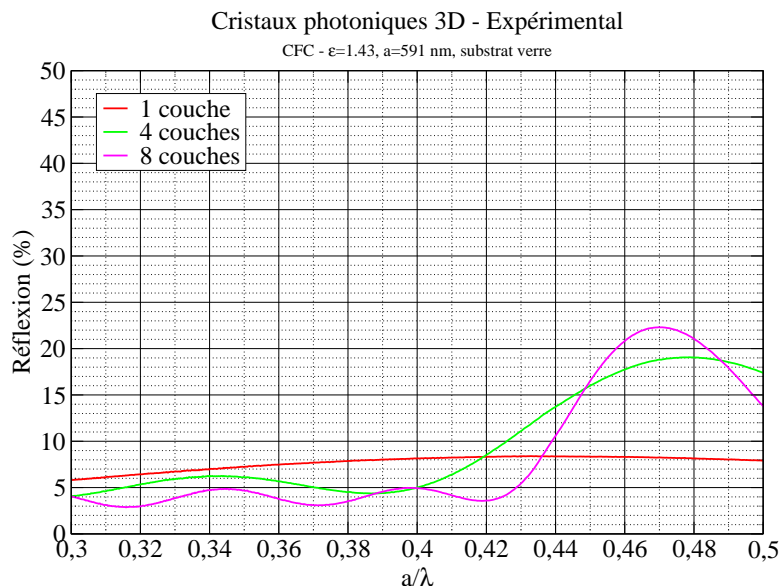


Figure 11.4 – Réflectivité expérimentale d'une réalisation.

En faisant la moyenne des réalisations, nous obtenons la réflectivité maximale expérimentale en fonction du nombre de couche (cf. Tableau 11.1).

Nb Couches	a/λ	Réfexion
1	0.43	$8.75\% \pm 0.75$
4	0.48	$17.50\% \pm 1.50$
8	0.47	$22.50\% \pm 1.50$

Tableau 11.1 – Moyenne de la réflectivité maximale expérimentale sur plusieurs réalisations

Ces valeurs indiquent une saturation de la réflectivité lorsque le nombre de couches empilées croît (cf. Figure 11.5).

Cette tendance peut être représentée par une fonction logarithme :

$$R(nb) = b_0 \exp(-nb/b_1) + b_2 \quad (11.1)$$

avec $b_0 = -0.20399$, $b_1 = 3.08883$ et $b_2 = 0.23435$.

La valeur de b_2 nous indique que la réflexion sature à une valeur de 23.435%. La valeur b_1 , nous indique que la réflexion a atteint près de 68% de sa valeur maximale à 3 couches ce qui est très peu. Cette saturation est un problème majeur et ne correspond pas au modèle phénoménologique suivi par les cristaux 1D et 2D (Voir Chapitre 10), qui suivent une évolution en tangente hyperbolique.

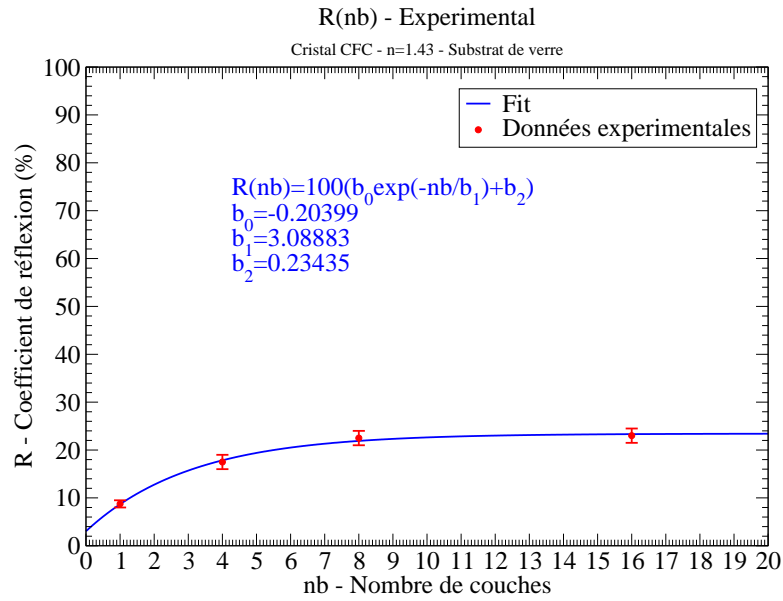


Figure 11.5 – Réflectivité en fonction du nombre de couches.

11.4 Modélisation numérique

Une modélisation à l'aide d'un code d'éléments finis (COMSOL®) des cristaux CFC à base de silice a donc été entreprise.

La maille élémentaire du cristal CFC pour un empilement de 4 couches est représentée par la figure 11.6.

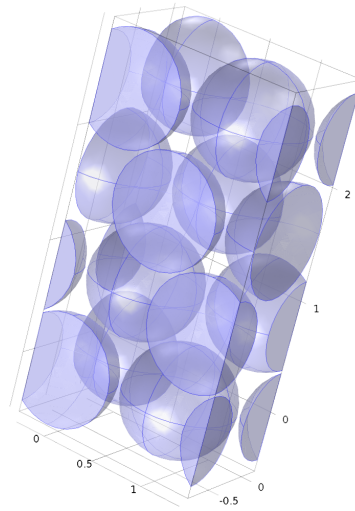


Figure 11.6 – Représentation de la maille élémentaire du cristal 3D.

Pour des raisons de stabilité numérique, les sphères ne sont pas strictement en contact les unes avec les autres (le rayon n'est pas égale à $0.5a$, mais à $0.49a$). Le matériau qui les constitue est en silice d'indice $n = 1.43$. Elles sont arrangées en structure CFC sur un substrat de verre ($n = 1.43$) et sont éclairées par une onde plane incidente normale. Nous obtenons alors la réflectivité représentée sur la figure 11.7.

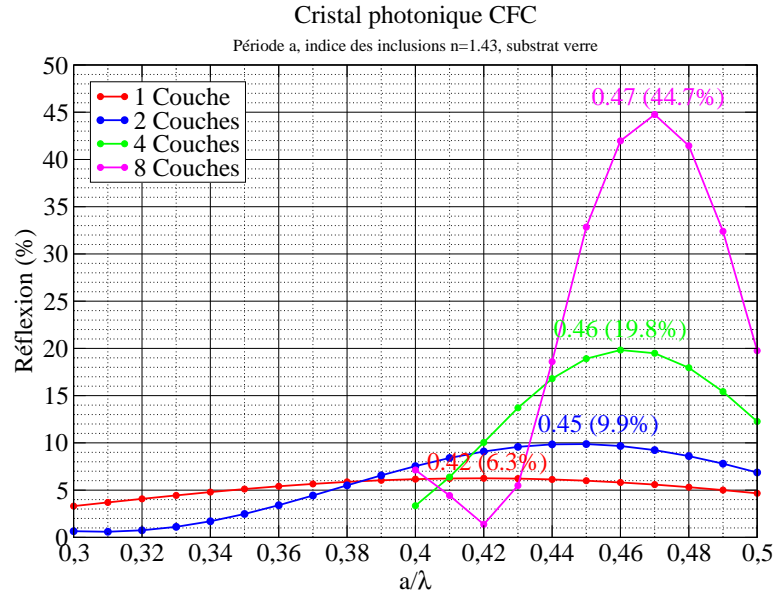


Figure 11.7 – Réflectivité théorique.

Les réflectivités maximales sont reportées dans le tableau 11.2.

Nb couches	a/λ	Réflection
1	0.42	6.3%
2	0.45	9.9%
4	0.46	19.8%
8	0.47	44.7%

Tableau 11.2 – Réflectivité maximale théorique

Les valeurs calculées ne suivent clairement pas la même tendance que les mesures expérimentales. Un fit utilisant l'expression déterminée pour les cristaux 1D et 2D (cf. Section 10.1) a été réalisé avec une légère correction de la valeur à l'origine pour prendre en compte le substrat. L'expression devient alors :

$$R(nb) = a_0 + \tanh\left(\frac{nb}{a_1}\right)^2 \quad (11.2)$$

La courbe est représentée à la figure 11.8.

Les valeurs de a_0 et a_1 obtenues sont $a_0 = 0.06515$ (soit une réflexion de 6.51% du substrat) et $a_1 = 10.99$. La courbe nous indique qu'il faut environ 18 couches pour atteindre les 90% de réflexion.

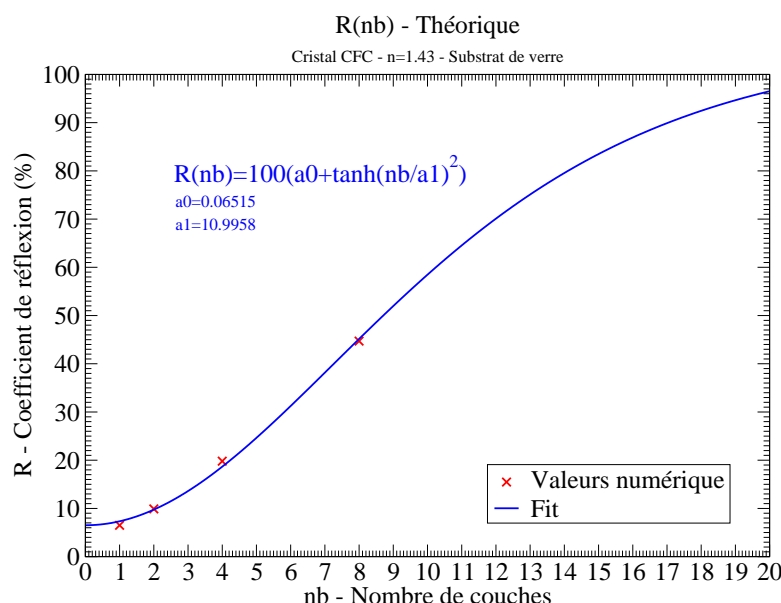


Figure 11.8 – Réflectivité en fonction du nombre de couches.

11.5 Confrontation Expérience/Modèle

L'évolution de la réflexion avec le nombre de couche est significativement différente entre la modélisation et l'expérience. La réflexion de cristaux expérimentaux constitués de huit couches est deux fois moins importante que celle prévue théoriquement.

Pour expliquer cet écart, une hypothèse peut être avancée en observant des images MEB des cristaux (cf. Figures 11.3a et 11.3b). Les défauts de structure se présentent sous la forme de lacunes et d'amas. Une baisse de réflectivité liée à ces défauts est la piste la plus plausible.

Néanmoins nous avons vu précédemment que, pour des cristaux 2D, la présence de lacunes engendrait des baisses de réflectivité localisées en fréquence (cf. Section 10.5.1). Or la réflectivité des cristaux réalisés est atténuée, par rapport au niveau théorique attendu, de façon globalement uniforme sur toute la plage fréquentielle. L'hypothèse de cet écart ne semble donc pas pertinente.

D'un autre côté, les calculs menés sur les cristaux 2D ont montré que la polydispersité pouvait engendrer une baisse de réflectivité sur toute la bande fréquentielle (cf. Section 10.5.2). Cette hypothèse semble donc à privilégier, d'autant que la granulométrie des sphères de silice utilisées est de 21%.

La polydispersité semble être l'origine principale de la baisse de réflectivité des opales réalisées. Cependant, il est possible que les autres défauts puissent dans une moindre mesure contribuer également à cette baisse.

Conclusion

Les cristaux photoniques sont des structures complexes permettant un contrôle des champs électromagnétiques. L'établissement des régimes prévus par la structure de bande nécessite un nombre suffisant de période. Ainsi, il existe une relation entre le maximum de réflexion et le nombre de périodes du cristal (dont nous avons montré la validité en 1D, 2D et 3D), qui permet de prédire le nombre de périodes nécessaire à l'obtention d'une réflexion maximale. Cependant, cette relation ne peut être justifiée analytiquement qu'en 1D pour un miroir de Bragg.

L'étude de la diffusion pour un cristal 2D, nous a montré l'insuffisance de l'approximation du premier ordre dans un cristal. En effet, même des défauts de faible amplitude engendrent des modes propres localisés en fréquence. RECY est mis en défaut pour des fluctuations supérieures à 10% d'un défaut unique. Pour un ensemble de défauts, RECY est acceptable pour certaines fréquences avec des erreurs inférieures à 15%. Néanmoins, une répartition statistique de défauts va faire croître rapidement l'erreur de RECY. Aussi, avons nous procédé à une étude par une méthode de Monte-Carlo. Nous avons ainsi montré que la polydispersité des rayons des cylindres composant le cristal provoque une baisse de réflectivité sur toute la largeur de la bande interdite.

Les résultats expérimentaux des opales montrent par comparaison avec un modèle d'opale sans défaut une baisse de la réflectivité continue au niveau de la bande interdite. L'analyse en 2D, nous indique que la polydispersité est une réponse envisageable. L'étude par Monte-Carlo pour un cristal 3D (en cours) demande des moyens de calcul importants qui permettra de confirmer (ou non) cette hypothèse.

Conclusion générale

Des outils de calcul de champ diffusé

A l'issue de ce travail, nous disposons de plusieurs outils de calcul pour l'évaluation du champ diffusé par des fluctuations de permittivité et de perméabilité. Les méthodes EMFORS et ABE permettent d'obtenir le champ diffusé dans un empilement de couches de magnéto-diélectriques. Elles nous ont également permis d'obtenir des formules analytiques simple de champ diffusé pour une couche dans l'air ou sur métal. Les contributions spécifiques des fluctuations magnétiques ont été mises en évidence. La méthode RECY est un outil efficace et approprié qui permet de calculer le champ diffusé pour une structure quelconque sous réserve que le champ dans la structure sans défaut puisse être calculé.

Des applications variées

RECY a ainsi pu être appliquée sur des structures comme un réseau élémentaire mais aussi sur une structure complexe (un pixel CMOS) et sur les cristaux photoniques. Les champs diffusés sont obtenus avec une erreur faible due à l'approximation au premier ordre. Pour les cristaux photoniques, les défauts même faibles peuvent créer des champs diffusés importants, rendant invalide l'approximation du premier ordre. C'est pourquoi, pour calculer l'impact des défauts sur la réflexion du cristal photonique, nous avons utilisé une méthode de Monte-Carlo. La polydispersité des objets composant le cristal est ainsi apparue comme le facteur principal de la diffusion conduisant à la limitation de la réflectivité.

Perspectives

Les méthodes au premier ordre développées ont été confrontées à un calcul exact (COMSOL). Pour compléter la validation des outils, notamment sur l'apport des fluctuations magnétiques, une démonstration expérimentale où la fluctuation magnétique et diélectrique est contrôlée pour un matériau magnétique de faible indice est en cours. Cette étude permettra de valider la pertinence de l'approche au premier ordre vis à vis de cas réels de matériaux diffusant.

La méthode RECY permet de déterminer le champ diffusé comme le produit d'une fonction du champ dans la structure idéale (sans défaut) et de la fonction de fluctuation. Elle ouvre ainsi des possibilités intéressantes dans l'évaluation des champs diffusés pour les méta-matériaux que l'on peut décrire à l'aide d'une permittivité et d'une perméabilité effective. De ce point de vue, l'ajout des fluctuations de perméabilité dans les méthodes de calcul de champ diffusé est un pas important pour l'évaluation de l'impact de défauts au sein de cette structure.

En ce qui concerne les opales, comme nous l'avons déjà mentionné, le lien entre granulométrie et baisse de réflectivité doit être consolidé. Ce travail, actuellement en cours, sera mené par des calculs 3D d'une part et des caractérisations optiques d'autre part.

La suite naturelle de cette thèse est maintenant de traiter le problème inverse à savoir retrouver la statistique des fluctuations de propriétés du matériau à partir de la mesure du champ diffusé. Les méthodes numériques traitant les problèmes inverses mettent en œuvre un grand nombre d'appels à la fonction de calcul direct. Pour des traitements

efficaces, le coût calcul de la fonction directe doit être le plus faible possible. Nous pouvons alors envisager d'utiliser les outils ainsi développés dans cette thèse, qui sont beaucoup plus efficaces (puisque'il s'agit alors d'une simple fonction linéaire) que le calcul numérique complet, pour développer des algorithmes performants de traitement du problème inverse.

Annexes

Annexe A

Système de coordonnées généralisées

Nous rappelons les bases nécessaires pour l'utilisation du système de coordonnées généralisées.

A.1 Coordonnées curvilignes

[64] Soient dans un domaine donné, trois fonctions indépendantes (A.1), continues et univoques¹ des coordonnées rectangulaires x , y et z .

$$u^1 = f_1(x, y, z), \quad u^2 = f_2(x, y, z), \quad u^3 = f_3(x, y, z) \quad (\text{A.1})$$

Il est possible de résoudre ces équations par rapport à x , y et z , ce qui donne trois fonctions (A.2) également indépendantes et continues.

$$x = \varphi_1(u^1, u^2, u^3), \quad y = \varphi_2(u^1, u^2, u^3), \quad z = \varphi_3(u^1, u^2, u^3) \quad (\text{A.2})$$

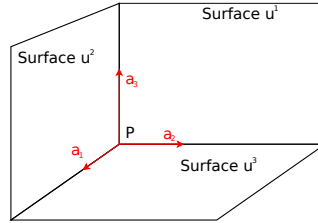


Figure A.1 – Vecteurs de base dans un système de coordonnées curvilignes.

Les fonctions u^1 , u^2 et u^3 sont appelées les coordonnées générales ou curvilignes. Sur chaque surface de coordonnées u^i , la coordonnée u^i est constante et les deux autres sont variables. Deux surfaces se coupent selon une courbe appelée une courbe de coordonnées, le long de laquelle deux coordonnées sont constantes et la troisième variable.

Soit un vecteur $\vec{\rho}$ allant d'une origine arbitraire à un point $P(x, y, z)$. Le point et par conséquent le vecteur $\vec{\rho}$, peuvent être considérés comme des fonctions des coordonnées curvilignes u^1 , u^2 et u^3 .

1. qui pour un x donné n'a qu'un y bien défini

Une variation infiniment petite de $\vec{\rho}$, obtenue par un petit déplacement le long des courbes de coordonnées, est donnée par (A.3).

$$d\vec{\rho} = \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial u^2} du^2 + \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial u^3} du^3 \quad (\text{A.3})$$

A.1.1 Base(s) de coordonnées curvilignes

Les vecteurs \vec{a}_i ($i = 1, 2, 3$) (A.4) sont appelés les vecteurs unitaires (mais pas forcément unités) associés au point P . Ils constituent un système de référence pour tous les autres vecteurs associés à ce point particulier.

$$\vec{a}_i = \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial u^i} \quad (\text{A.4})$$

Les trois vecteurs de bases \vec{a}_i forment un parallélépipède dont le volume est donné par (A.5).

$$V = \vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3) = \vec{a}_2 \cdot (\vec{a}_3 \times \vec{a}_1) = \vec{a}_3 \cdot (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \quad (\text{A.5})$$

Le volume ainsi formé permet de former trois nouveaux vecteurs définis par (A.6).

$$\vec{a}^1 = \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{V}, \quad \vec{a}^2 = \frac{\vec{a}_3 \times \vec{a}_1}{V}, \quad \vec{a}^3 = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{V} \quad (\text{A.6})$$

Ce sont les vecteurs unitaires inverses et ils peuvent servir de système de référence au même titre que les vecteurs unitaires eux-mêmes.

Les produits scalaires des vecteurs unitaires sont notés avec les symboles :

$$g_{ij} = \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j \quad (\text{A.7a})$$

$$g^{ij} = \vec{a}^i \cdot \vec{a}^j \quad (\text{A.7b})$$

L'ensemble de ces g_{ij} peut être noté sous la forme d'une matrice, dont le déterminant est noté g :

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{23} & g_{33} \end{vmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

A.1.2 Vecteur dans la base de coordonnées curvilignes

Un vecteur fixe \vec{F} , au point P , peut-être décomposé en ses composantes selon les deux systèmes de référence \vec{a}^i ou \vec{a}_i .

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^3 f^i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^3 f_i \vec{a}^i \quad (\text{A.9})$$

Les quantités f^i sont appelées les composantes *contravariantes* du vecteurs tandis que les composantes f_i sont appelées *covariantes*.

Un ensemble de vecteurs unité, tangents aux courbes u^i au même titre que l'ensemble unitaire \vec{a}^i , peut être défini par (A.10),

$$\vec{e}_i = \frac{\vec{a}_i}{\sqrt{\vec{a}_i \cdot \vec{a}_i}}, \quad (\text{A.10})$$

d'où :

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^3 F_i \vec{e}_i, \quad (\text{A.11})$$

avec :

$$F_i = \sqrt{\vec{a}_i \cdot \vec{a}_i} f^i. \quad (\text{A.12})$$

A.1.3 Élément de longueur ds^2

Le vecteur $d\vec{\rho}$ représente un déplacement infinitésimal du point $P(u^1, u^2, u^3)$, au point voisin de coordonnées $(u^1 + du^1, u^2 + du^2, u^3 + du^3)$. L'amplitude de ce déplacement est noté ds^2 , elle constitue un élément de longueur.

$$ds^2 = d\vec{\rho} \cdot d\vec{\rho} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j du^i du^j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \vec{a}^i \cdot \vec{a}^j du_i du_j \quad (\text{A.13})$$

A.1.4 Opérateurs différentiels

Le gradient d'une fonction scalaire $\varphi(u^1, u^2, u^3)$ est donné par

$$\vec{\nabla} \varphi = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial u^i} \vec{a}^i. \quad (\text{A.14})$$

La divergence d'une fonction vectorielle $\vec{F}(u^1, u^2, u^3)$ au point P est donnée par

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial u^i} (f^i \sqrt{g}). \quad (\text{A.15})$$

Le rotationnel d'une fonction vectorielle $\vec{F}(u^1, u^2, u^3)$ au point P est donné par

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\left(\frac{\partial f_3}{\partial u^2} - \frac{\partial f_2}{\partial u^3} \right) \vec{a}_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial u^3} - \frac{\partial f_3}{\partial u^1} \right) \vec{a}_2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial u^1} - \frac{\partial f_1}{\partial u^2} \right) \vec{a}_3 \right] \quad (\text{A.16})$$

Le laplacien d'une fonction scalaire est le divergence du gradient de cette fonction et est donné par :

$$\Delta \varphi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial u^i} \left(g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial \varphi}{\partial u^j} \right). \quad (\text{A.17})$$

A.2 Systèmes orthogonaux

[64] L'utilisation de ce type de système permet une simplification considérable des formules précédentes. Les vecteurs unitaires \vec{a}_i d'un système orthogonal sont, par définition, mutuellement perpendiculaires. Il en résulte que \vec{a}^i est parallèle à \vec{a}_i et que leurs modules sont inverses l'un de l'autre :

$$\vec{a}^i = \frac{1}{\vec{a}_i \cdot \vec{a}_i} \vec{a}_i. \quad (\text{A.18})$$

De plus,

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3 = \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_1 = 0, \quad (\text{A.19})$$

donc $g_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

Dans le cas de systèmes orthogonaux, on introduit usuellement les abréviations $h_i = \sqrt{g_{ii}}$ (ce sont les coefficients métriques), où

$$h_i^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u^i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u^i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u^i} \right)^2. \quad (\text{A.20})$$

Ainsi,

$$\sqrt{g} = h_1 h_2 h_3. \quad (\text{A.21})$$

L'expression du gradient, de la divergence, du rotationnel et du laplacien dans un système de coordonnées curvilignes orthogonales, peuvent être déduites à partir des précédentes.

$$\vec{\nabla} \varphi = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial \varphi}{\partial u^i} \vec{e}_i, \quad (\text{A.22})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u^1} (h_2 h_3 F_1) + \frac{\partial}{\partial u^2} (h_3 h_1 F_2) + \frac{\partial}{\partial u^3} (h_1 h_2 F_3) \right], \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{F} = & \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u^2} (h_3 F_3) - \frac{\partial}{\partial u^3} (h_2 F_2) \right] \vec{e}_1 \\ & + \frac{1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial}{\partial u^3} (h_1 F_1) - \frac{\partial}{\partial u^1} (h_3 F_3) \right] \vec{e}_2 + \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial u^1} (h_2 F_2) - \frac{\partial}{\partial u^2} (h_1 F_1) \right] \vec{e}_3. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

$$\Delta \varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u^1} \right) + \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u^2} \right) + \frac{\partial}{\partial u^3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial u^3} \right) \right] \quad (\text{A.25})$$

A.3 Exemples pratiques

A.3.1 Coordonnées cylindriques

Les coordonnées cylindriques circulaires sont :

$$u^1 = r, \quad u^2 = \theta, \quad u^3 = z. \quad (\text{A.26})$$

Elles sont liées aux coordonnées rectangulaires par les relations :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z \quad (\text{A.27})$$

Pour obtenir tous les opérateurs différentiels associés à ce système de coordonnées, il suffit de trouver les h_i à l'aide de l'équation A.20. Dans ce cas, les coefficients métriques prennent les valeurs :

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1 \quad (\text{A.28})$$

A.3.2 Coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques circulaires sont :

$$u^1 = r , u^2 = \theta , u^3 = \phi. \quad (\text{A.29})$$

Elles sont liées aux coordonnées rectangulaires par les relations :

$$x = r \sin \theta \cos \phi , y = r \sin \theta \sin \phi , z = r \cos \theta \quad (\text{A.30})$$

Pour obtenir tous les opérateurs différentiels associés à ce système de coordonnées, il suffit de trouver les h_i à l'aide de l'équation [A.20](#). Dans ce cas, les coefficients métriques prennent les valeurs :

$$h_1 = 1 , h_2 = r , h_3 = r \sin \theta \quad (\text{A.31})$$

Annexe B

Dérivée au sens des distributions

Nous avons besoin de calculer le rotationnel et éventuellement de la divergence du champ électromagnétique. Ces champs contenant des fonctions de Heaviside, doivent être traités en terme de distribution.

B.1 La fonction de Heaviside $\mathcal{H}(z)$

Nous cherchons à dériver au sens des distributions la fonction de Heaviside. C'est une fonction régulière localement sommable. Nous pouvons alors associer à la fonction de Heaviside, sa distribution.

Nous calculons alors :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} T_{\mathcal{H}}(z), \varphi(z) \right\rangle$$

Pour toute fonction φ appartenant à l'espace des fonctions indéfiniment dérivable et à support borné \mathcal{D} . (En notant bien que la fonction test φ est une fonction de \mathbb{R} et non de \mathbb{R}^3 , car $\mathcal{H}(z)$ est une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R}).

Par définition de la dérivée des distributions, nous avons :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} T_{\mathcal{H}}(z), \varphi(z) \right\rangle &= - \left\langle T_{\mathcal{H}}(z), \frac{\partial}{\partial x_i} [\varphi(z)] \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} T_{\mathcal{H}}(z), \varphi(z) \right\rangle &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}(z) \frac{\partial}{\partial x_i} [\varphi(z)] dz \end{aligned}$$

Nous pouvons appliquer la définition de la fonction de Heaviside et ainsi réduire les bornes d'intégration. En effet, la fonction de Heaviside est nulle pour toute valeur de z négative et unitaire pour les valeurs positives. *Il n'est pas nécessaire de définir la valeur de la fonction en 0 car il s'agit d'un ensemble de mesure nulle [65].* Nous avons alors :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} T_{\mathcal{H}}(z), \varphi(z) \right\rangle = - \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x_i} [\varphi(z)] dz$$

Les dérivées en x et en y sont immédiates car la fonction φ est une fonction de z uniquement. Pour la dérivée en z , nous obtenons :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial z} T_{\mathcal{H}}(z), \varphi(z) \right\rangle = - \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial z} [\varphi(z)] dz$$

Ce qui s'intègre aisément, nous avons :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial z} T_{\mathcal{H}}(z), \varphi(z) \right\rangle = - \left[\varphi(z) \right]_0^{+\infty}$$

Comme la fonction φ est bornée, elle est nulle à l'infini. Nous obtenons :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial z} T_{\mathcal{H}}(z), \varphi(z) \right\rangle = \varphi(0)$$

Nous repassons dans les notations des distributions. Nous pouvons écrire, en remarquant que $\varphi(0)$ est le résultat d'une distribution de Dirac en $z = 0$ sur la fonction test $\varphi(z)$, que :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial z} T_{\mathcal{H}}(z), \varphi(z) \right\rangle = \langle \delta_z, \varphi(z) \rangle$$

Nous retenons donc que :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{H}(z) = 0} \tag{B.1a}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y} \mathcal{H}(z) = 0} \tag{B.1b}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{H}(z) = \delta_z} \tag{B.1c}$$

En retenant que δ_z est défini par :

$$\boxed{\langle \delta_z, \varphi(z) \rangle = \varphi(0)} \tag{B.2}$$

B.2 La fonction de Heaviside $\mathcal{H}(z - h(x, y))$

A priori, cette fonction de Heaviside est une fonction de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} . Néanmoins la fonction $h(x, y)$ est une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} . Mais pas n'importe quel espace \mathbb{R} , il s'agit du même espace que celui des z . Donc finalement, la fonction de Heaviside est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Pour simplifier, nous allons poser : $Z(x, y, z) = z - h(x, y)$, et nous allons donc prendre la fonction test $\phi(Z)$. Nous devons alors calculer :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} T_{\mathcal{H}}(Z), \phi(Z) \right\rangle$$

Nous pouvons alors faire comme précédemment, mais il ne faut cependant pas oublier que Z est une fonction de x, y et z . Nous avons alors :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} T_{\mathcal{H}}(Z), \phi(Z) \right\rangle = - \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\phi(Z) \right] dZ$$

La fonction ϕ est une fonction au sens classique du terme, nous pouvons donc utiliser les règles de composition et de dérivées habituelles. Nous écrivons donc :

$$\frac{\partial \phi(Z)}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi(Z)}{\partial Z} \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial x_i}$$

D'après la forme de la fonction $Z(x, y, z)$ nous calculons facilement toutes ses dérivées partielles :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial x} &= -\frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial Z}{\partial y} &= -\frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial Z}{\partial z} &= 1 \end{aligned}$$

Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial x} T_{\mathcal{H}}(Z), \phi(Z) \right\rangle &= \frac{\partial h}{\partial x} \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial Z} [\phi(Z)] dZ \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial y} T_{\mathcal{H}}(Z), \phi(Z) \right\rangle &= \frac{\partial h}{\partial y} \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial Z} [\phi(Z)] dZ \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial z} T_{\mathcal{H}}(Z), \phi(Z) \right\rangle &= - \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial Z} [\phi(Z)] dZ \end{aligned}$$

L'intégration se fait simplement, comme précédemment et nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial x} T_{\mathcal{H}}(Z), \phi(Z) \right\rangle &= -\frac{\partial h}{\partial x} \delta_Z \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial y} T_{\mathcal{H}}(Z), \phi(Z) \right\rangle &= -\frac{\partial h}{\partial y} \delta_Z \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial z} T_{\mathcal{H}}(Z), \phi(Z) \right\rangle &= \delta_Z \end{aligned}$$

Nous devons préciser la signification de δ_Z . Elle agit sur la variable Z mais nous pouvons cependant la rapporter sur la variable z . Par définition :

$$\langle \delta_Z, \phi(Z) \rangle = \phi(0)$$

Cela induit donc l'égalité $Z = 0$, en remplaçant Z par son expression, nous avons donc l'égalité suivante :

$$z - h(x, y) = 0$$

Nous en déduisons : $z = h(x, y)$. Ainsi δ_Z devient δ_h dont la définition est :

$$\boxed{\langle \delta_h, \varphi(z) \rangle = \varphi(h)} \quad (\text{B.3})$$

Finalement nous avons :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{H}(z - h(x, y)) = -\frac{\partial h}{\partial x} \delta_h} \quad (\text{B.4a})$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y} \mathcal{H}(z - h(x, y)) = -\frac{\partial h}{\partial y} \delta_h} \quad (\text{B.4b})$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{H}(z - h(x, y)) = \delta_h} \quad (\text{B.4c})$$

B.3 Dérivée du produit d'une distribution quelconque T par une fonction α indéfiniment dérivable

B.3.1 Démonstration de la règle de calcul

Soit T , une distribution quelconque et α , une fonction indéfiniment dérivable, nous pouvons définir le produit entre la distribution T et la distribution T_α associée à la fonction α , par :

$$\langle T_\alpha T, \phi \rangle = \langle T, \alpha \phi \rangle \quad (\text{B.5})$$

Ainsi, quelque soit T , le nombre $\langle T, \alpha \phi \rangle$ existe et le produit $T_\alpha T$ a un sens.

Maintenant, nous cherchons à dériver ce produit. Nous avons par définition de la dérivée d'une distribution :

$$\langle (T_\alpha T)', \phi \rangle = -\langle T_\alpha T, \phi' \rangle$$

Ensuite, d'après la définition (B.5) que nous venons d'énoncer :

$$-\langle T_\alpha T, \phi' \rangle = -\langle T, \alpha \phi' \rangle$$

Nous pouvons appliquer ensuite la règle de dérivation d'un produit de deux fonctions sur $\alpha \phi'$. Nous obtenons :

$$-\langle T, \alpha \phi' \rangle = -\langle T, (\alpha \phi)' - \alpha' \phi \rangle$$

Par linéarité, nous écrivons :

$$-\langle T, (\alpha \phi)' - \alpha' \phi \rangle = -\langle T, (\alpha \phi)' \rangle + \langle T, \alpha' \phi \rangle$$

En appliquant la définition de la dérivée d'une distribution, nous avons :

$$-\langle T, (\alpha \phi)' \rangle + \langle T, \alpha' \phi \rangle = \langle T', \alpha \phi \rangle + \langle T, \alpha' \phi \rangle$$

Puis en utilisant la définition (B.5), nous obtenons :

$$\langle T', \alpha \phi \rangle + \langle T, \alpha' \phi \rangle = \langle T_\alpha T', \phi \rangle + \langle T'_\alpha T, \phi \rangle$$

Nous pouvons noter indifféremment T'_α et $T_{\alpha'}$ car la fonction α est continue. La dérivée au sens des distributions et celle au sens des fonctions sont identiques.

Finalement, en utilisant la linéarité :

$$\langle (T_\alpha T)', \phi \rangle = \langle T_\alpha T' + T'_\alpha T, \phi \rangle$$

Ainsi nous avons :

$$\boxed{(\alpha T)' = \alpha T' + \alpha' T} \quad (\text{B.6})$$

B.3.2 Application à la fonction de Heaviside

Comme nous l'avons vu dans les expressions (B.1) et (B.4), la dérivée de la fonction de Heaviside est une delta de Dirac, qui est une distribution singulière.

Nous dérivons le produit d'une fonction $f(z)$ complexe, localement dérivable et continue mais qui peut être discontinue sur $] -\infty, 0[$, avec la fonction de Heaviside $\mathcal{H}(z)$. Nous ne pouvons donc pas utiliser la règle (B.6). La définition de dérivée des distributions nous permet d'écrire :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial z} (\mathcal{H}(z)f(z)), \varphi(z) \right\rangle = - \left\langle \mathcal{H}(z)f(z), \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \right\rangle$$

Nous pouvons écrire le produit sous forme intégrale (*comme la fonction $f(z)$ est complexe, la définition du produit scalaire est différente et nous devons prendre alors le complexe conjugué de la fonction*) :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial z} (\mathcal{H}(z)f(z)), \varphi(z) \right\rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}(z) \overline{f(z)} \varphi'(z) dz$$

Ici, les discontinuités de la fonction $f(z)$ sur $] -\infty, 0[$ pourraient poser problème, mais la nullité de la fonction de Heaviside sur cette ensemble supprime le problème. Nous obtenons :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial z} (\mathcal{H}(z)f(z)), \varphi(z) \right\rangle = - \int_0^{+\infty} \overline{f(z)} \varphi'(z) dz$$

Nous pouvons faire l'intégration par partie, nous avons :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial z} (\mathcal{H}(z)f(z)), \varphi(z) \right\rangle = - \left[\overline{f(z)} \varphi(z) \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \overline{f'(z)} \varphi(z) dz$$

La fonction test $\varphi(z)$ est une fonction bornée, qui est nulle à l'infini. Nous avons :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial z} (\mathcal{H}(z)f(z)), \varphi(z) \right\rangle = \overline{f(0)} \varphi(0) + \int_0^{+\infty} \overline{f'(z)} \varphi(z) dz$$

Ce que nous pouvons écrire (*en prenant la définition inverse nous retrouvons la fonction $f(z)$*) :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial z} (\mathcal{H}(z)f(z)), \varphi(z) \right\rangle = \langle f(0)\delta_z, \varphi(z) \rangle + \langle \mathcal{H}(z)f'(z), \varphi(z) \rangle$$

Soit :

$$\frac{\partial}{\partial z} (\mathcal{H}(z)f(z)) = f(0)\delta_z + \mathcal{H}(z)f'(z)$$

Nous retrouvons la règle de calcul (B.6). Mais il faut bien faire attention à la valeur que prend la fonction $f(z)$. En effet, au sens des distributions le produit d'une fonction et de la delta de Dirac s'écrit :

$$f(z)\delta_z = f(0)\delta_z$$

Il est très important que la fonction $f(z)$ soit prise en $z = 0$, en effet, si nous prenons :

$$(f(z) - g(z))\delta_z = 0$$

Il serait maladroit et même faux d'en conclure l'égalité sur tout z des deux fonctions. Effectivement si nous prenons comme fonction, par exemple, $f(z) = z^2$ et $g(z) = z$, l'égalité : $(z^2 - z)\delta_z = 0$ resterait vrai mais il est évident que $z^2 - z = 0$ n'est vrai qu'en $z = 0$. Aussi, nous pouvons établir que :

$$\boxed{(f(z) - g(z))\delta_z = 0 \Rightarrow f(0) - g(0) = 0} \quad (\text{B.7})$$

Il en va de même pour la delta δ_h :

$$f(z)\delta_h = f(h)\delta_h$$

B.4 Divergence du produit d'un champ continu et de la fonction de Heaviside

B.4.1 La fonction de Heaviside $\mathcal{H}(z)$

Nous cherchons à calculer : $\vec{\nabla} \cdot (\vec{F}\mathcal{H}(z))$ où le champ \vec{F} est un champ dont les composantes sont des fonctions continues et indéfiniment dérivables. Nous pouvons alors appliquer la règle de dérivation (B.6) et les résultats obtenus pour les dérivées de la fonction de Heaviside (cf. Expressions (B.1)). Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{F}\mathcal{H}(z)) &= \frac{\partial}{\partial x} (\vec{F}(x, y, z)\mathcal{H}(z)) + \frac{\partial}{\partial y} (\vec{F}(x, y, z)\mathcal{H}(z)) + \frac{\partial}{\partial z} (\vec{F}(x, y, z)\mathcal{H}(z)) \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{F}(x, y, z)\mathcal{H}(z)) &= \frac{\partial F_x}{\partial x} \mathcal{H}(z) + \frac{\partial F_y}{\partial y} \mathcal{H}(z) + \frac{\partial F_z}{\partial z} \mathcal{H}(z) + F_z(x, y, 0)\delta_z \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement :

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot (\vec{F}(x, y, z)\mathcal{H}(z)) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x, y, z) \mathcal{H}(z) + \vec{z} \cdot \vec{F}(x, y, 0) \delta_z} \quad (\text{B.8})$$

B.4.2 La fonction de Heaviside $\mathcal{H}(z - h(x, y))$

De la même façon que pour la fonction de Heaviside $\mathcal{H}(z)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{F}(x, y, z)\mathcal{H}(z - h(x, y))) &= \\ \frac{\partial F_x}{\partial x} \mathcal{H}(z - h(x, y)) + \frac{\partial F_y}{\partial y} \mathcal{H}(z - h(x, y)) + \frac{\partial F_z}{\partial z} \mathcal{H}(z - h(x, y)) \\ &\quad - \frac{\partial h}{\partial x} F_x(x, y, h)\delta_h - \frac{\partial h}{\partial y} F_y(x, y, h)\delta_h + F_z(x, y, h)\delta_h \end{aligned}$$

En introduisant la normale \vec{n}_h à la surface $z = h(x, y)$:

$$\vec{n}_h = \begin{pmatrix} -\frac{\partial h}{\partial x} \\ -\frac{\partial h}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.9})$$

Nous pouvons écrire :

$$\boxed{\begin{aligned} & \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{F}(x, y, z) \mathcal{H}(z - h(x, y)) \right) \\ &= \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x, y, z) \mathcal{H}(z - h(x, y)) + \vec{n}_h \cdot \vec{F}(x, y, h) \delta_h \end{aligned}} \quad (\text{B.10})$$

B.5 Rotationnel du produit d'un champ continu et de la fonction de Heaviside

B.5.1 La fonction de Heaviside $\mathcal{H}(z)$

Nous cherchons à calculer : $\vec{\nabla} \times (\vec{F}\mathcal{H}(z))$ où le champ \vec{F} est un champ dont les composantes sont des fonctions continues et indéfiniment dérivables. Nous pouvons alors appliquer la règle de dérivation (B.6) et les résultats obtenus pour les dérivées de la fonction de Heaviside (cf. Expressions B.1). Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{F}\mathcal{H}(z)) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} (F_z \mathcal{H}(z)) - \frac{\partial}{\partial z} (F_y \mathcal{H}(z)) \\ \frac{\partial}{\partial z} (F_x \mathcal{H}(z)) - \frac{\partial}{\partial x} (F_z \mathcal{H}(z)) \\ \frac{\partial}{\partial x} (F_y \mathcal{H}(z)) - \frac{\partial}{\partial y} (F_x \mathcal{H}(z)) \end{pmatrix} \\ \vec{\nabla} \times (\vec{F}\mathcal{H}(z)) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} \mathcal{H}(z) - \frac{\partial F_y}{\partial z} \mathcal{H}(z) - F_y \delta_z \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} \mathcal{H}(z) - \frac{\partial F_z}{\partial x} \mathcal{H}(z) + F_x \delta_z \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} \mathcal{H}(z) - \frac{\partial F_x}{\partial y} \mathcal{H}(z) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement :

$$\boxed{\vec{\nabla} \times (\vec{F}(x, y, z) \mathcal{H}(z)) = \vec{\nabla} \times \vec{F}(x, y, z) \mathcal{H}(z) + \vec{z} \times \vec{F}(x, y, 0) \delta_z} \quad (\text{B.11})$$

B.5.2 La fonction de Heaviside $\mathcal{H}(z - h(x, y))$

De la même façon que pour la fonction de Heaviside $\mathcal{H}(z)$, nous obtenons :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{F}\mathcal{H}(z - h(x, y))) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} \mathcal{H}(z - h(x, y)) + \begin{pmatrix} -F_z \frac{\partial h}{\partial y} - F_y \\ F_x + F_z \frac{\partial h}{\partial x} \\ -F_y \frac{\partial h}{\partial x} + F_x \frac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix} \delta_h$$

Nous pouvons écrire :

$$\boxed{\begin{aligned} & \vec{\nabla} \times (\vec{F}(x, y, z) \mathcal{H}(z - h(x, y))) \\ &= \vec{\nabla} \times \vec{F}(x, y, z) \mathcal{H}(z - h(x, y)) + \vec{n}_h \times \vec{F}(x, y, h) \delta_h \end{aligned}} \quad (\text{B.12})$$

Annexe C

Opérateur Nabla, dyade et produit vectoriel

Nous rappelons dans cette annexe l'ensemble des propriétés sur les vecteurs, dyade et opérateurs Nabla utilisés dans tout ce manuscrit.

C.1 Propriétés de l'opérateur nabla

Propriété C.1 : Rotationnel du rotationnel

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} \quad (\text{C.1})$$

Propriété C.2 : Divergence du rotationnel

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \quad (\text{C.2})$$

Propriété C.3 : Divergence du produit vectoriel

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad (\text{C.3})$$

Propriété C.4 : Rotationnel d'un produit

$$\vec{\nabla} \times (f\vec{A}) = f\vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} f \times \vec{A} \quad (\text{C.4})$$

Propriété C.5 : Divergence d'un produit

$$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{A}) = f\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla} f \cdot \vec{A} \quad (\text{C.5})$$

C.2 Définition d'une dyade

La fonction dyade, notée \bar{M} , est définie par :

$$\bar{M} = \sum_i \sum_j M_{ij} \vec{u}_i \vec{u}_j \quad (\text{C.6})$$

Où les vecteurs \vec{u}_i ($i = (x, y, z)$) sont les vecteurs unitaires de la base cartésienne. Il est possible d'associer à la dyade \bar{M} une matrice carré $[M]$ dont les éléments sont donnés par M_{ij} .

Elle s'écrit alors sous la forme :

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} M_{xx} & M_{xy} & M_{xz} \\ M_{yx} & M_{yy} & M_{yz} \\ M_{zx} & M_{zy} & M_{zz} \end{pmatrix} \quad (\text{C.7})$$

Par définition, le produit scalaire droit d'une dyade \bar{M} et d'un vecteur \vec{S} s'écrit

$$\bar{M} \vec{S} = \sum_j \left(\sum_i M_{ij} \vec{u}_i \right) (\vec{u}_j \cdot \vec{S}) \quad (\text{C.8})$$

Ce qui peut s'écrire :

$$\bar{M}(\vec{\rho}, \vec{\rho}') \vec{S}(\vec{\rho}') = \begin{pmatrix} M_{xx}S_x + M_{xy}S_y + M_{xz}S_z \\ M_{yx}S_x + M_{yy}S_y + M_{yz}S_z \\ M_{zx}S_x + M_{zy}S_y + M_{zz}S_z \end{pmatrix} \quad (\text{C.9})$$

C.3 Rotationnel du produit d'une dyade et d'un vecteur

Le rotationnel du produit d'une dyade et d'un vecteur s'écrit :

$$\begin{aligned} & \vec{\nabla} \times [\bar{M}(\vec{\rho}, \vec{\rho}') \vec{S}(\vec{\rho}')] \\ &= \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} M_{xx} & M_{xy} & M_{xz} \\ M_{yx} & M_{yy} & M_{yz} \\ M_{zx} & M_{zy} & M_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} M_{xx}S_x + M_{xy}S_y + M_{xz}S_z \\ M_{yx}S_x + M_{yy}S_y + M_{yz}S_z \\ M_{zx}S_x + M_{zy}S_y + M_{zz}S_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_y(M_{zx}S_x + M_{zy}S_y + M_{zz}S_z) - \partial_z(M_{yx}S_x + M_{yy}S_y + M_{yz}S_z) \\ \partial_z(M_{xx}S_x + M_{xy}S_y + M_{xz}S_z) - \partial_x(M_{zx}S_x + M_{zy}S_y + M_{zz}S_z) \\ \partial_x(M_{yx}S_x + M_{yy}S_y + M_{yz}S_z) - \partial_y(M_{xx}S_x + M_{xy}S_y + M_{xz}S_z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \{\partial_y(M_{zx}) - \partial_z(M_{yx})\}S_x + \{\partial_y(M_{zy}) - \partial_z(M_{yy})\}S_y + \{\partial_y(M_{zz}) - \partial_z(M_{yz})\}S_z \\ \{\partial_z(M_{xx}) - \partial_x(M_{zx})\}S_x + \{\partial_z(M_{xy}) - \partial_x(M_{zy})\}S_y + \{\partial_z(M_{xz}) - \partial_x(M_{zz})\}S_z \\ \{\partial_x(M_{yx}) - \partial_y(M_{xx})\}S_x + \{\partial_x(M_{yy}) - \partial_y(M_{xy})\}S_y + \{\partial_x(M_{yz}) - \partial_y(M_{xz})\}S_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \{\partial_y(M_{zx}) - \partial_z(M_{yx})\} & \{\partial_y(M_{zy}) - \partial_z(M_{yy})\} & \{\partial_y(M_{zz}) - \partial_z(M_{yz})\} \\ \{\partial_z(M_{xx}) - \partial_x(M_{zx})\} & \{\partial_z(M_{xy}) - \partial_x(M_{zy})\} & \{\partial_z(M_{xz}) - \partial_x(M_{zz})\} \\ \{\partial_x(M_{yx}) - \partial_y(M_{xx})\} & \{\partial_x(M_{yy}) - \partial_y(M_{xy})\} & \{\partial_x(M_{yz}) - \partial_y(M_{xz})\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times [\bar{M}(\vec{\rho}, \vec{\rho}') \vec{S}(\vec{\rho}')] = [\vec{\nabla} \times \bar{M}(\vec{\rho}, \vec{\rho}')] \vec{S}(\vec{\rho}')} \quad (\text{C.10})$$

Où la dyade du rotationnel de la dyade \bar{M} est donnée par la matrice :

$$[\vec{\nabla} \times \bar{M}(\vec{\rho}, \vec{\rho}')] = \begin{pmatrix} \{\partial_y(M_{zx}) - \partial_z(M_{yx})\} & \{\partial_y(M_{zy}) - \partial_z(M_{yy})\} & \{\partial_y(M_{zz}) - \partial_z(M_{yz})\} \\ \{\partial_z(M_{xx}) - \partial_x(M_{zx})\} & \{\partial_z(M_{xy}) - \partial_x(M_{zy})\} & \{\partial_z(M_{xz}) - \partial_x(M_{zz})\} \\ \{\partial_x(M_{yx}) - \partial_y(M_{xx})\} & \{\partial_x(M_{yy}) - \partial_y(M_{xy})\} & \{\partial_x(M_{yz}) - \partial_y(M_{xz})\} \end{pmatrix}$$

C.4 Rotationnel du rotationnel du produit d'une dyade et d'un vecteur

$$\vec{\nabla} \times \left\{ [\vec{\nabla} \times \bar{M}(\vec{\rho}, \vec{\rho}')] \vec{S}(\vec{\rho}') \right\}$$

En considérant la démonstration précédente (C.10), nous pouvons écrire directement :

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \left\{ [\vec{\nabla} \times \bar{M}(\vec{\rho}, \vec{\rho}')] \vec{S}(\vec{\rho}') \right\} = \left\{ \vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \bar{M}(\vec{\rho}, \vec{\rho}')] \right\} \vec{S}(\vec{\rho}')} \quad (\text{C.11})$$

Où la dyade du rotationnel du rotationnel de la dyade \bar{M} est donnée par :

$$\left\{ \vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \bar{M}(\vec{\rho}, \vec{\rho}')] \right\} = \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{M}}_{xx} & \tilde{\tilde{M}}_{xy} & \tilde{\tilde{M}}_{xz} \\ \tilde{\tilde{M}}_{yx} & \tilde{\tilde{M}}_{yy} & \tilde{\tilde{M}}_{yz} \\ \tilde{\tilde{M}}_{zx} & \tilde{\tilde{M}}_{zy} & \tilde{\tilde{M}}_{zz} \end{pmatrix}$$

Avec :

$$\begin{aligned} - \tilde{\tilde{M}}_{xx} &= \partial_y(\partial_x(M_{yx}) - \partial_y(M_{xx})) - \partial_z(\partial_z(M_{xx}) - \partial_x(M_{zx})) \\ - \tilde{\tilde{M}}_{xy} &= \partial_y(\partial_x(M_{yy}) - \partial_y(M_{xy})) - \partial_z(\partial_z(M_{xy}) - \partial_x(M_{zy})) \\ - \tilde{\tilde{M}}_{xz} &= \partial_y(\partial_x(M_{yz}) - \partial_y(M_{xz})) - \partial_z(\partial_z(M_{xz}) - \partial_x(M_{zz})) \\ - \tilde{\tilde{M}}_{yx} &= \partial_z(\partial_y(M_{zx}) - \partial_z(M_{yx})) - \partial_x(\partial_x(M_{yx}) - \partial_y(M_{xx})) \\ - \tilde{\tilde{M}}_{yy} &= \partial_z(\partial_y(M_{zy}) - \partial_z(M_{yy})) - \partial_x(\partial_x(M_{yy}) - \partial_y(M_{xy})) \\ - \tilde{\tilde{M}}_{yz} &= \partial_z(\partial_y(M_{zz}) - \partial_z(M_{yz})) - \partial_x(\partial_x(M_{yz}) - \partial_y(M_{xz})) \\ - \tilde{\tilde{M}}_{zx} &= \partial_x(\partial_z(M_{xx}) - \partial_x(M_{zx})) - \partial_y(\partial_y(M_{zx}) - \partial_z(M_{yx})) \\ - \tilde{\tilde{M}}_{zy} &= \partial_x(\partial_z(M_{xy}) - \partial_x(M_{zy})) - \partial_y(\partial_y(M_{zy}) - \partial_z(M_{yy})) \\ - \tilde{\tilde{M}}_{zz} &= \partial_x(\partial_z(M_{xz}) - \partial_x(M_{zz})) - \partial_y(\partial_y(M_{zz}) - \partial_z(M_{yz})) \end{aligned}$$

Que nous pouvons réécrire :

$$\begin{aligned} - \tilde{\tilde{M}}_{xx} &= \partial_y \partial_x(M_{yx}) - \partial_y \partial_y(M_{xx}) - \partial_z \partial_z(M_{xx}) + \partial_z \partial_x(M_{zx}) \\ - \tilde{\tilde{M}}_{xy} &= \partial_y \partial_x(M_{yy}) - \partial_y \partial_y(M_{xy}) - \partial_z \partial_z(M_{xy}) + \partial_z \partial_x(M_{zy}) \\ - \tilde{\tilde{M}}_{xz} &= \partial_y \partial_x(M_{yz}) - \partial_y \partial_y(M_{xz}) - \partial_z \partial_z(M_{xz}) + \partial_z \partial_x(M_{zz}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
- \tilde{\tilde{M}}_{yx} &= \partial_z \partial_y (M_{zx}) - \partial_z \partial_z (M_{yx}) - \partial_x \partial_x (M_{yx}) + \partial_x \partial_y (M_{xx}) \\
- \tilde{\tilde{M}}_{yy} &= \partial_z \partial_y (M_{zy}) - \partial_z \partial_z (M_{yy}) - \partial_x \partial_x (M_{yy}) + \partial_x \partial_y (M_{xy}) \\
- \tilde{\tilde{M}}_{yz} &= \partial_z \partial_y (M_{zz}) - \partial_z \partial_z (M_{yz}) - \partial_x \partial_x (M_{yz}) + \partial_x \partial_y (M_{xz}) \\
- \tilde{\tilde{M}}_{zx} &= \partial_x \partial_z (M_{xx}) - \partial_x \partial_x (M_{zx}) - \partial_y \partial_y (M_{zx}) + \partial_y \partial_z (M_{yx}) \\
- \tilde{\tilde{M}}_{zy} &= \partial_x \partial_z (M_{xy}) - \partial_x \partial_x (M_{zy}) - \partial_y \partial_y (M_{zy}) + \partial_y \partial_z (M_{yy}) \\
- \tilde{\tilde{M}}_{zz} &= \partial_x \partial_z (M_{xz}) - \partial_x \partial_x (M_{zz}) - \partial_y \partial_y (M_{zz}) + \partial_y \partial_z (M_{yz})
\end{aligned}$$

Que nous pouvons encore réécrire :

$$\begin{aligned}
- \tilde{\tilde{M}}_{xx} &= - [\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2] (M_{xx}) + \partial_x \partial_x (M_{xx}) + \partial_y \partial_x (M_{yx}) + \partial_z \partial_x (M_{zx}) \\
- \tilde{\tilde{M}}_{xy} &= - [\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2] (M_{xy}) + \partial_x \partial_x (M_{xy}) + \partial_y \partial_x (M_{yy}) + \partial_z \partial_x (M_{zy}) \\
- \tilde{\tilde{M}}_{xz} &= - [\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2] (M_{xz}) + \partial_x \partial_x (M_{xz}) + \partial_y \partial_x (M_{yz}) + \partial_z \partial_x (M_{zz}) \\
- \tilde{\tilde{M}}_{yx} &= - [\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2] (M_{yx}) + \partial_x \partial_y (M_{xx}) + \partial_y \partial_y (M_{yx}) + \partial_z \partial_y (M_{zx}) \\
- \tilde{\tilde{M}}_{yy} &= - [\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2] (M_{yy}) + \partial_x \partial_y (M_{xy}) + \partial_y \partial_y (M_{yy}) + \partial_z \partial_y (M_{zy}) \\
- \tilde{\tilde{M}}_{yz} &= - [\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2] (M_{yz}) + \partial_x \partial_y (M_{xz}) + \partial_y \partial_y (M_{yz}) + \partial_z \partial_y (M_{zz}) \\
- \tilde{\tilde{M}}_{zx} &= - [\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2] (M_{zx}) + \partial_x \partial_z (M_{xx}) + \partial_y \partial_z (M_{yx}) + \partial_z \partial_z (M_{zx}) \\
- \tilde{\tilde{M}}_{zy} &= - [\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2] (M_{zy}) + \partial_x \partial_z (M_{xy}) + \partial_y \partial_z (M_{yy}) + \partial_z \partial_z (M_{zy}) \\
- \tilde{\tilde{M}}_{zz} &= - [\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2] (M_{zz}) + \partial_x \partial_z (M_{xz}) + \partial_y \partial_z (M_{yz}) + \partial_z \partial_z (M_{zz})
\end{aligned}$$

Nous reconnaissons alors :

$$\boxed{\left\{ \bar{\nabla} \times \left[\bar{\nabla} \times \bar{M}(\vec{\rho}, \vec{\rho}') \right] \right\} = -\vec{\nabla}^2 \bar{M} + \bar{\Delta} \bar{M}} \quad (\text{C.12})$$

Où la dyade $\bar{\Delta}$ est définit par :

$$\bar{\Delta} = \begin{pmatrix} \partial_x \partial_x & \partial_x \partial_y & \partial_x \partial_z \\ \partial_y \partial_x & \partial_y \partial_y & \partial_y \partial_z \\ \partial_z \partial_x & \partial_z \partial_y & \partial_z \partial_z \end{pmatrix}$$

et où $\vec{\nabla}^2$ est donné par :

$$\vec{\nabla}^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$$

C.5 Transformation de Fourier

Une démonstration identique à celle faite à la Section C.4 peut être faite pour la transformée de Fourier du rotationnel du rotationnel de la dyade \bar{M} . Connaissant la transformation de Fourier d'une dérivée (sous réserve, que la dyade soit une fonction sommable, continue et dérivable [35]), nous avons :

$$\boxed{\mathcal{TF} \left\{ \bar{\nabla} \times \left[\bar{\nabla} \times \bar{M}(\vec{\rho}, \vec{\rho}') \right] \right\} = -\hat{\vec{\nabla}}^2 \hat{\bar{M}} + \hat{\bar{\Delta}} \hat{\bar{M}}} \quad (\text{C.13})$$

Où la dyade $\hat{\bar{\Delta}}$ est défini par :

$$\hat{\bar{\Delta}} = \begin{pmatrix} -\sigma_x^2 & -\sigma_x \sigma_y & \imath \sigma_x \partial_z \\ -\sigma_x \sigma_y & -\sigma_y^2 & \imath \sigma_y \partial_z \\ \imath \sigma_x \partial_z & \imath \sigma_y \partial_z & \partial_z^2 \end{pmatrix}$$

et où $\hat{\vec{\nabla}}$ est donné par :

$$\hat{\vec{\nabla}} = \imath \vec{\sigma} + \vec{z} \partial_z$$

C.6 Propriétés utiles des opérateurs dyadique

Propriété C.14 : Forme dyadique de Fourier de divergence du rotationnel

$$\hat{\Delta} \left(\hat{\vec{\nabla}}^2 \hat{M} - \hat{\Delta} \hat{M} \right) = \bar{0} \quad (\text{C.14})$$

Nous cherchons à montrer la validité de la propriété (C.14). Il suffit pour cela, de montrer que chaque composante est nulle. Nous noterons $\bar{\zeta} = \hat{\Delta} \left(-\hat{\vec{\nabla}}^2 \hat{M} + \hat{\Delta} \hat{M} \right)$.

$$\begin{aligned} - \bar{\zeta}_{xx} &= -\sigma_x^2 \left[-\sigma_x \sigma_y (M_{yx}) + \sigma_y^2 (M_{xx}) - \partial_z^2 (M_{xx}) + \imath \partial_z \sigma_x (M_{zx}) \right] \\ &\quad - \sigma_x \sigma_y \left[\imath \partial_z \sigma_y (M_{zx}) - \partial_z^2 (M_{yx}) + \sigma_x^2 (M_{yx}) - \sigma_x \sigma_y (M_{xx}) \right] \\ &\quad + \imath \sigma_x \partial_z \left[\imath \sigma_x \partial_z (M_{xx}) + \sigma_x^2 (M_{zx}) + \sigma_y^2 (M_{zx}) + \imath \sigma_y \partial_z (M_{yx}) \right] \\ - \bar{\zeta}_{xy} &= -\sigma_x^2 \left[-\sigma_y \sigma_x (M_{yy}) + \sigma_y^2 (M_{xy}) - \partial_z^2 (M_{xy}) + \imath \partial_z \sigma_x (M_{zy}) \right] \\ &\quad - \sigma_x \sigma_y \left[\imath \partial_z \sigma_y (M_{zy}) - \partial_z^2 (M_{yy}) + \sigma_x^2 (M_{yy}) - \sigma_x \sigma_y (M_{xy}) \right] \\ &\quad + \imath \sigma_x \partial_z \left[\imath \sigma_x \partial_z (M_{xy}) + \sigma_x^2 (M_{zy}) + \sigma_y^2 (M_{zy}) + \imath \sigma_y \partial_z (M_{yy}) \right] \\ - \bar{\zeta}_{xz} &= -\sigma_x^2 \left[-\sigma_y \sigma_x (M_{yz}) + \sigma_y^2 (M_{xz}) - \partial_z^2 (M_{xz}) + \imath \partial_z \sigma_x (M_{zz}) \right] \\ &\quad - \sigma_x \sigma_y \left[\imath \partial_z \sigma_y (M_{zz}) - \partial_z^2 (M_{yz}) + \sigma_x^2 (M_{yz}) - \sigma_x \sigma_y (M_{xz}) \right] \\ &\quad + \imath \sigma_x \partial_z \left[\imath \sigma_x \partial_z (M_{xz}) + \sigma_x^2 (M_{zz}) + \sigma_y^2 (M_{zz}) + \imath \sigma_y \partial_z (M_{yz}) \right] \\ - \bar{\zeta}_{yx} &= -\sigma_x \sigma_y \left[-\sigma_x \sigma_y (M_{yx}) + \sigma_y^2 (M_{xx}) - \partial_z^2 (M_{xx}) + \imath \partial_z \sigma_x (M_{zx}) \right] \\ &\quad - \sigma_y^2 \left[\imath \partial_z \sigma_y (M_{zx}) - \partial_z^2 (M_{yx}) + \sigma_x^2 (M_{yx}) - \sigma_x \sigma_y (M_{xx}) \right] \\ &\quad + \imath \sigma_y \partial_z \left[\imath \sigma_x \partial_z (M_{xx}) + \sigma_x^2 (M_{zx}) + \sigma_y^2 (M_{zx}) + \imath \sigma_y \partial_z (M_{yx}) \right] \\ - \bar{\zeta}_{yy} &= -\sigma_x \sigma_y \left[-\sigma_y \sigma_x (M_{yy}) + \sigma_y^2 (M_{xy}) - \partial_z^2 (M_{xy}) + \imath \partial_z \sigma_x (M_{zy}) \right] \\ &\quad - \sigma_y^2 \left[\imath \partial_z \sigma_y (M_{zy}) - \partial_z^2 (M_{yy}) + \sigma_x^2 (M_{yy}) - \sigma_x \sigma_y (M_{xy}) \right] \\ &\quad + \imath \sigma_y \partial_z \left[\imath \sigma_x \partial_z (M_{xy}) + \sigma_x^2 (M_{zy}) + \sigma_y^2 (M_{zy}) + \imath \sigma_y \partial_z (M_{yy}) \right] \\ - \bar{\zeta}_{yz} &= -\sigma_x \sigma_y \left[-\sigma_y \sigma_x (M_{yz}) + \sigma_y^2 (M_{xz}) - \partial_z^2 (M_{xz}) + \imath \partial_z \sigma_x (M_{zz}) \right] \\ &\quad - \sigma_y^2 \left[\imath \partial_z \sigma_y (M_{zz}) - \partial_z^2 (M_{yz}) + \sigma_x^2 (M_{yz}) - \sigma_x \sigma_y (M_{xz}) \right] \\ &\quad + \imath \sigma_y \partial_z \left[\imath \sigma_x \partial_z (M_{xz}) + \sigma_x^2 (M_{zz}) + \sigma_y^2 (M_{zz}) + \imath \sigma_y \partial_z (M_{yz}) \right] \\ - \bar{\zeta}_{zx} &= \imath \sigma_x \partial_z \left[-\sigma_x \sigma_y (M_{yx}) + \sigma_y^2 (M_{xx}) - \partial_z^2 (M_{xx}) + \imath \partial_z \sigma_x (M_{zx}) \right] \\ &\quad + \imath \sigma_y \partial_z \left[\imath \partial_z \sigma_y (M_{zx}) - \partial_z^2 (M_{yx}) + \sigma_x^2 (M_{yx}) - \sigma_x \sigma_y (M_{xx}) \right] \\ &\quad + \partial_z^2 \left[\imath \sigma_x \partial_z (M_{xx}) + \sigma_x^2 (M_{zx}) + \sigma_y^2 (M_{zx}) + \imath \sigma_y \partial_z (M_{yx}) \right] \\ - \bar{\zeta}_{zy} &= \imath \sigma_x \partial_z \left[-\sigma_y \sigma_x (M_{yy}) + \sigma_y^2 (M_{xy}) - \partial_z^2 (M_{xy}) + \imath \partial_z \sigma_x (M_{zy}) \right] \\ &\quad + \imath \sigma_y \partial_z \left[\imath \partial_z \sigma_y (M_{zy}) - \partial_z^2 (M_{yy}) + \sigma_x^2 (M_{yy}) - \sigma_x \sigma_y (M_{xy}) \right] \\ &\quad + \partial_z^2 \left[\imath \sigma_x \partial_z (M_{xy}) + \sigma_x^2 (M_{zy}) + \sigma_y^2 (M_{zy}) + \imath \sigma_y \partial_z (M_{yy}) \right] \\ - \bar{\zeta}_{zz} &= \imath \sigma_x \partial_z \left[-\sigma_y \sigma_x (M_{yz}) + \sigma_y^2 (M_{xz}) - \partial_z^2 (M_{xz}) + \imath \partial_z \sigma_x (M_{zz}) \right] \\ &\quad + \imath \sigma_y \partial_z \left[\imath \partial_z \sigma_y (M_{zz}) - \partial_z^2 (M_{yz}) + \sigma_x^2 (M_{yz}) - \sigma_x \sigma_y (M_{xz}) \right] \\ &\quad + \partial_z^2 \left[\imath \sigma_x \partial_z (M_{xz}) + \sigma_x^2 (M_{zz}) + \sigma_y^2 (M_{zz}) + \imath \sigma_y \partial_z (M_{yz}) \right] \end{aligned}$$

Nous pouvons vérifier que chacune de ces composantes sont bien nulles. Nous avons ainsi démontré la validité de la propriété (C.14), qui est une forme dyadique de Fourier

de la propriété (C.2). Une même démonstration peut être effectuée dans l'espace direct, nous obtenons alors la forme dyadique de la propriété (C.2).

Propriété C.15 : Forme dyadique de divergence du rotationnel

$$\bar{\Delta} \left(\vec{\nabla}^2 \bar{M} - \bar{\Delta} \bar{M} \right) = \bar{0} \quad (\text{C.15})$$

C.7 Propriétés utiles pour les vecteurs

Nous rappelons ici certaines propriétés utiles sur les vecteurs.

Propriété C.16 : Produit scalaire d'un produit vectoriel

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \quad (\text{C.16})$$

Nous avons essentiellement utilisé la forme suivante de la propriété (C.16) :

$$\boxed{(\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} + (\vec{C} \times \vec{B}) \cdot \vec{A} = 0} \quad (\text{C.17})$$

Propriété C.18 : Produit vectoriel d'un produit vectoriel

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} \quad (\text{C.18})$$

Annexe D

Intensité diffusée normalisée

Nous cherchons ici à établir l'expression de l'intensité diffusée normalisée utilisée dans ce manuscrit.

D.1 Définition du flux de vecteur à travers une surface

Le flux d'un vecteur \vec{V} à travers une surface S paramétrée par $\vec{s}(u, v)$ où $(u, v) \in D$ est :

$$\Phi = \int_D \vec{V}(\vec{s}(u, v)) \cdot d\vec{S}$$

où

$$d\vec{S} = \left(\frac{\partial \vec{s}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{s}}{\partial v} \right) du dv$$

Remarque : Le vecteur \vec{V} doit absolument être exprimé comme une fonction du vecteur $\vec{s}(u, v)$ qui paramétrise la surface.

D.2 Vecteur de Poynting

Le vecteur de Poynting est donné par :

$$\vec{P}^- = \frac{1}{2} \left(\vec{E}^- \times \vec{H}^- \right)$$

Or nous pouvons exprimer le champ magnétique en fonction du champ électrique et vice-versa. En effet, nous connaissons la forme des champs pour chaque angle d'observation (soit pour chaque $\vec{\sigma}$) :

$$\vec{E}^-(x, y, z) = \hat{\vec{E}}^-(\vec{\sigma}, z) e^{i\vec{\sigma} \cdot \vec{r}} = \vec{A}^-(\vec{\sigma}) e^{-i\alpha(\vec{\sigma})z} e^{i\vec{\sigma} \cdot \vec{r}} = \vec{A}^-(\vec{\sigma}) e^{i\vec{k}^- \cdot \vec{\rho}}$$

$$\vec{H}^-(x, y, z) = \hat{\vec{H}}^-(\vec{\sigma}, z) e^{i\vec{\sigma} \cdot \vec{r}} = \vec{B}^-(\vec{\sigma}) e^{-i\alpha(\vec{\sigma})z} e^{i\vec{\sigma} \cdot \vec{r}} = \vec{B}^-(\vec{\sigma}) e^{i\vec{k}^- \cdot \vec{\rho}}$$

En reprenant les équations de Maxwell et en calculant le rotationnel, nous obtenons alors :

$$\vec{H}^-(x, y, z) = \frac{1}{\omega\mu_0} \vec{k}^- \times \vec{E}^-(x, y, z) \quad \vec{E}^-(x, y, z) = -\frac{1}{\omega\varepsilon_0} \vec{k}^- \times \vec{H}^-(x, y, z)$$

où

$$\vec{k}^- = k \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ -\cos \theta \end{pmatrix}$$

Nous avons alors :

$$\vec{P}^-(x, y, z) = \frac{1}{2\omega\mu_0} \left(\vec{E}^- \times \left(\vec{k}^- \times \vec{E}^- \right) \right)$$

Nous obtenons alors grâce à la relation (C.18) :

$$\vec{P}^-(x, y, z) = \frac{1}{2\omega\mu_0} \left(\left(\vec{E}^- \cdot \vec{E}^- \right) \vec{k}^- - \left(\vec{E}^- \cdot \vec{k}^- \right) \vec{E}^- \right)$$

Or la divergence du champ électrique est nulle (pas de source) : $\vec{k}^- \cdot \vec{E}^- = 0$, le vecteur Poynting devient donc :

$$\tilde{P}^-(\vec{k}^-) = \frac{1}{2\omega\mu_0} \left| \vec{A}^-(\vec{\sigma}) \right|^2 \vec{k}^-$$

D.3 Flux du vecteur de Poynting à travers la surface S

Nous cherchons à calculer le flux du vecteur de Poynting à travers la surface S paramétrée par \vec{k} .

$$d\vec{S} = k^2 \sin \theta \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \phi \\ -\sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} d\theta d\phi$$

Pour obtenir le flux, il faut calculer le produit scalaire :

$$\vec{k}^- \cdot d\vec{S} = k^3 \sin \theta \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ -\cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \phi \\ -\sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} d\theta d\phi$$

$$\vec{k}^- \cdot d\vec{S} = -k^3 \sin \theta (\sin^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \theta) d\theta d\phi$$

$$\vec{k}^- \cdot d\vec{S} = -k^3 \sin \theta d\theta d\phi$$

Finalement le flux à travers la surface S paramétrée par \vec{k}^- est :

$$\Phi = -k^3 \frac{1}{2\omega\mu_0} \int \left| \vec{A}^-(\vec{\sigma}) \right|^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

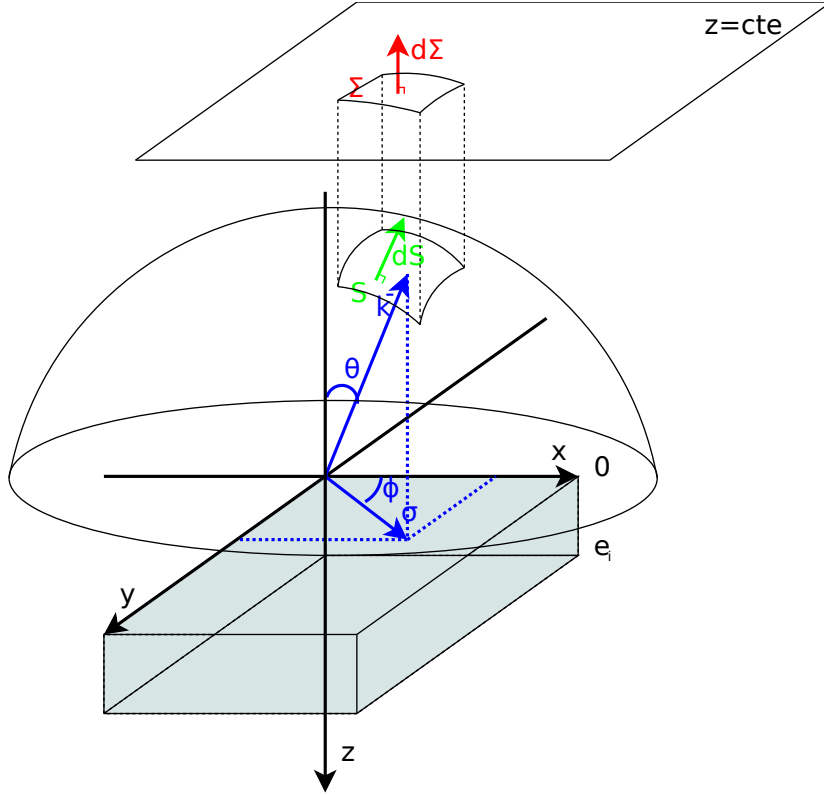


Figure D.1 – Représentation de la surface S et de la surface projetée Σ .

D.4 Projection d'une surface dans un plan

Nous cherchons, à présent, à calculer le flux à travers un plan parallèle à $z = 0$. Il faut donc que la surface S soit projetée dans un plan parallèle à $z = 0$. Le vecteur normal unitaire de ce plan est donnée par :

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La surface projetée dans ce plan, Σ , aura donc le même vecteur normal unitaire \vec{z} que le plan. Pour obtenir la norme $d\Sigma$, il faut utiliser la relation $d\Sigma = dS |\vec{n} \cdot \vec{z}|$ où \vec{n} est le vecteur normal unitaire de la surface S . Comme :

$$d\vec{S} = dS \vec{n}$$

Avec

$$dS = k^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \phi \\ -\sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

Nous avons (l'angle θ variant entre $(-90, 90)^\circ$) :

$$d\Sigma = k^2 \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi$$

Et ainsi :

$$d\vec{\Sigma} = k^2 \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi \vec{z}$$

Pour obtenir le flux, il faut calculer le produit scalaire :

$$\vec{k}^- \cdot d\vec{\Sigma} = -k^3 \sin \theta \cos^2 \theta d\theta d\phi$$

Finalement le flux à travers la surface Σ dans un plan parallèle à $z = 0$ est :

$$\Phi = -k^3 \frac{1}{2\omega\mu_0} \int \left| \vec{A}^-(\vec{\sigma}) \right|^2 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\phi$$

D.5 Intensité diffusée

Nous introduisons l'angle solide élémentaire $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$, nous obtenons alors l'intensité diffusée $I^d(\theta, \phi)$ donnée par :

$$I^d(\theta, \phi) = \left(\frac{d\Phi}{d\Omega} \right)$$

Ce qui fait

$$I^d(\theta, \phi) = -k^3 \frac{1}{2\omega\mu_0} \left| \vec{A}^-(\vec{\sigma}) \right|^2 \cos^2 \theta$$

D.6 Flux incident

Nous cherchons finalement le flux du vecteur de Poynting du champ incident à travers la surface éclairée Υ (contenue dans le plan $z = 0$), afin de normaliser l'intensité diffusée. La surface élémentaire est paramétrée par \vec{r} et est donnée par :

$$d\vec{\Upsilon} = dx dy \vec{z}$$

De la même façon que pour le champ diffusé, le vecteur de Poynting incident est donné par :

$$\vec{P}^0 = \frac{1}{2\omega\mu_0} \left| \vec{A}^0 \right|^2 \vec{k}^0$$

où :

$$\vec{k}^0 = k \begin{pmatrix} \sin i_0 \cos \phi_0 \\ \sin i_0 \sin \phi_0 \\ \cos i_0 \end{pmatrix}$$

Pour obtenir le flux du champ incident, il faut calculer le produit scalaire :

$$\vec{k}^0 \cdot d\vec{\Upsilon} = k \cos i_0 dx dy$$

Le flux incident est donc :

$$\Phi_0 = \frac{k}{2\omega\mu_0} \left| \vec{A}^0 \right|^2 \cos i_0 \Upsilon$$

D.7 Intensité diffusée normalisée

L'intensité diffusée normalisée est donnée par le rapport entre l'intensité diffusée et le flux incident.

$$I = \frac{I^d}{\Phi_0}$$

Nous avons donc

$$I(\theta, \phi) = -k^2 \left| \frac{\vec{A}^-(\vec{\sigma})}{\vec{A}^0} \right|^2 \frac{\cos^2 \theta}{\cos i_0} \frac{1}{\Upsilon}$$

Or, nous pouvons montrer que l'amplitude du champ diffusé est donné sous la forme (en utilisant la solution analytique) :

$$\frac{\vec{A}^-(\vec{\sigma})}{\vec{A}^0} = B_\varepsilon \hat{p} + B_\mu \hat{q}$$

Ainsi l'intensité diffusée prend la forme :

$$I(\theta, \phi) = -k^2 \frac{\cos^2 \theta}{\cos i_0} \frac{1}{\Upsilon} |B_\varepsilon \hat{p} + B_\mu \hat{q}|^2$$

Comme :

$$|B_\varepsilon \hat{p} + B_\mu \hat{q}|^2 = |B_\varepsilon \hat{p}|^2 + |B_\mu \hat{q}|^2 + 2\Re(B_\varepsilon \hat{p} \overline{B_\mu \hat{q}})$$

Et introduisant :

$$\begin{aligned} \gamma_\varepsilon &= \frac{1}{\Upsilon} |\hat{p}|^2 \\ \gamma_\mu &= \frac{1}{\Upsilon} |\hat{q}|^2 \\ \gamma_{\varepsilon\mu} &= \frac{1}{\Upsilon} \Re(\hat{p} \hat{q}) \end{aligned}$$

Finalement, l'intensité diffusée prend la forme :

$$I = \beta_\varepsilon \gamma_\varepsilon + \beta_\mu \gamma_\mu + \beta_{\varepsilon\mu} \gamma_{\varepsilon\mu}$$

Annexe E

Amplitude de l'onde plane générée par un dipôle

Nous démontrons le calcul des amplitudes de l'onde plane générée par un dipôle, utilisées dans la méthode RECY, pour les espaces de dimensions 2 et 3.

E.1 En 3D direct

Soit un dipôle localisé à l'infini $\vec{\rho}_\infty$ orienté le long du vecteur unitaire \vec{d} . Ce dipôle génère un courant donné par \vec{J}^{dip} .

$$\vec{J}^{dip} = -Il\delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}_\infty)\vec{d} \quad (\text{E.1})$$

Pour obtenir le champ généré par ce courant nous utilisons la dyade de Green. En effet, nous avons vu précédemment que le champ électrique \vec{E} crée par un courant électrique \vec{J} est donné par l'équation (E.2).

$$\vec{E}(\vec{\rho}) = -i\omega\mu \iiint_V \left(\vec{J}(\vec{\rho}') \cdot \vec{G}(\vec{\rho}, \vec{\rho}') \right) d\vec{\rho}' \quad (\text{E.2})$$

avec \vec{G} la dyade de Green : $(\vec{I} + \vec{\Delta}/k^2) g(\vec{\rho}, \vec{\rho}')$ et $g(\vec{\rho}, \vec{\rho}')$ la fonction de Green : $\exp(ik|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|)/(4\pi|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|)$ [66].

Nous avons ainsi :

$$\vec{E}^{dip}(\vec{\rho}) = -i\omega\mu \iiint_V \left(\vec{J}^{dip}(\vec{\rho}') \cdot \vec{G}(\vec{\rho}, \vec{\rho}') \right) d\vec{\rho}' \quad (\text{E.3})$$

$$\vec{E}^{dip}(\vec{\rho}) = i\omega\mu \iiint_V \left(Il\delta(\vec{\rho}' - \vec{\rho}_\infty)\vec{d} \cdot \vec{G}(\vec{\rho}, \vec{\rho}') \right) d\vec{\rho}' \quad (\text{E.4})$$

$$\vec{E}^{dip}(\vec{\rho}) = i\omega\mu Il\vec{d} \cdot \vec{G}(\vec{\rho}, \vec{\rho}_\infty) \quad (\text{E.5})$$

$$\vec{E}^{dip}(\vec{\rho}) = i\omega\mu Il\vec{d} \cdot \left(\vec{I} + \frac{\vec{\Delta}}{k^2} \right) g(\vec{\rho}, \vec{\rho}_\infty) \quad (\text{E.6})$$

$$\vec{E}^{dip}(\vec{\rho}) = i\omega\mu Il\vec{d} \cdot \left(\vec{I} + \frac{\vec{\Delta}}{k^2} \right) \frac{\exp(ik|\vec{\rho} - \vec{\rho}_\infty|)}{4\pi|\vec{\rho} - \vec{\rho}_\infty|} \quad (\text{E.7})$$

$$\vec{E}^{dip}(\vec{\rho}) = \frac{i\omega\mu}{4\pi} Il \vec{d} \cdot \bar{\Sigma}(\vec{\rho}) \quad (\text{E.8})$$

Le dipôle génère donc une onde plane d'amplitude $A_{3D}^{dip} Il$:

$$A_{3D}^{dip} = \frac{i\omega\mu}{4\pi} \quad (\text{E.9})$$

orienté le long du vecteur $\vec{d} \cdot \bar{\Sigma}(\vec{\rho})$.

E.2 En 2D direct

Soit un dipôle localisé à l'infini $\vec{\rho}_\infty$ orienté le long du vecteur unitaire \vec{d} . Ce dipôle génère un courant donné par \vec{J}^{dip} .

$$\vec{J}^{dip} = -Il \delta(\vec{r} - \vec{r}_\infty) \vec{d} \quad (\text{E.10})$$

Pour obtenir le champ généré par ce courant nous utilisons la dyade de Green. En effet, nous avons vu précédemment que le champ électrique \vec{E} crée par un courant électrique \vec{J} est donné par l'équation (E.11).

$$\vec{E}(\vec{r}) = -i\omega\mu \iint_S \left(\vec{J}(\vec{r}') \cdot \bar{G}^{2D}(\vec{r}, \vec{r}') \right) d\vec{r}' \quad (\text{E.11})$$

avec \bar{G}^{2D} la dyade de Green : $(\bar{I} + \bar{\Delta}/k^2) g(\vec{r}, \vec{r}')$ et $g(\vec{r}, \vec{r}')$ la fonction de Green : $\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\vec{r} - \vec{r}'|)$ [66].

$$\vec{E}(\vec{r}) = -Il \frac{\omega\mu}{4} \vec{d} \cdot \left(\bar{I} + \frac{\bar{\Delta}}{k^2} \right) H_0^{(1)}(k|\vec{r} - \vec{r}_\infty|) \quad (\text{E.12})$$

La fonction de Hankel du premier type et d'ordre zéro $H_0^{(1)}(x)$ se comporte à la limite où x tend vers l'infini comme (E.13).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} H_0^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{x\pi}} e^{i(x - \frac{\pi}{4})} \quad (\text{E.13})$$

Nous avons ainsi,

$$\vec{E}(\vec{r}) = -Il \frac{\omega\mu}{4} \sqrt{\frac{2}{k\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-ik|\vec{r}_\infty|}}{\sqrt{|\vec{r}_\infty|}} \vec{d} \cdot \left(\bar{I} + \frac{\bar{\Delta}}{k^2} \right) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (\text{E.14})$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -Il \frac{\omega\mu}{4\pi} \sqrt{\lambda} \vec{d} \cdot \bar{\Sigma}^{2D} \quad (\text{E.15})$$

Le dipôle génère donc une onde plane d'amplitude $A_{2D}^{dip} Il$:

$$A_{2D}^{dip} = -\frac{\omega\mu}{4\pi} \sqrt{\lambda} \quad (\text{E.16})$$

orienté le long du vecteur $\vec{d} \cdot \bar{\Sigma}^{2D}$.

Annexe F

Homogénéisation

Étant donné un milieu composite dont les inclusions sont petites devant la longueur d'onde dans ce milieu, l'homogénéisation consiste à trouver les propriétés ε , μ d'un milieu homogène dont la réponse au champ électromagnétique sera la même que celle du milieu composite. Une littérature abondante traite du sujet [67, 68, 69], nous avons retenu cinq lois d'homogénéisation : Maxwell-Garnett [68, 70], Bruggeman [68, 71], ABG (Bruggeman asymétrique) [68], Looyenga [69, 72] et la moyenne.

F.1 Lois de Maxwell-Garnett et Bruggeman

Les lois de Maxwell-Garnett et de Bruggeman sont basées sur la résolution de l'équation de Laplace (quasi-statique) d'une sphère et la correspondance entre le champ diffracté par une assemblée de sphères identiques (de même polarisabilité) dans une matrice et le champ diffracté par une sphère homogène. Les lois de Maxwell-Garnett et de Bruggeman se distinguent par le fait que Bruggeman considère la matrice comme une particule, les sphères et les particules-matrice baignant dans un milieu effectif.

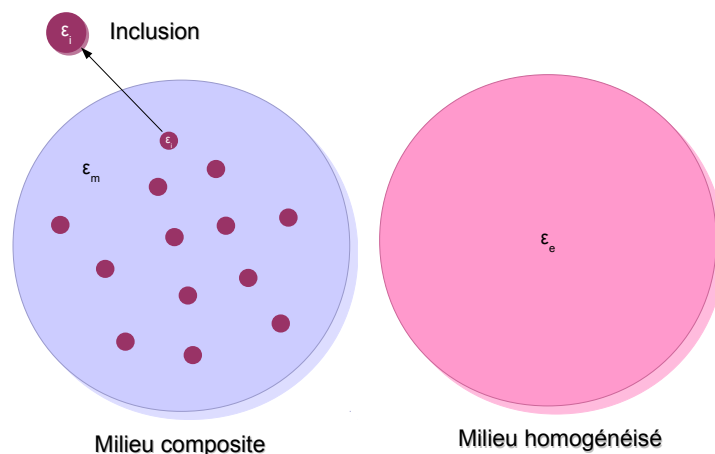


Figure F.1 – Lois d'homogénéisation Maxwell-Garnett et Bruggeman.

Lois d'homogénéisation

La dimension d peut être 2D (cylindre circulaire) ou 3D (sphère). Les permittivités des inclusions sont ε_i avec un taux de charge de q , celle de la matrice les englobant ε_m et enfin la permittivité effective du milieu est donné par ε_e .

– Maxwell-Garnett

$$\frac{\varepsilon_e - \varepsilon_m}{\varepsilon_e + (d-1)\varepsilon_m} = q \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_m}{\varepsilon_i + (d-1)\varepsilon_m}$$

– Bruggeman

$$q \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + (d-1)\varepsilon_e} = (q-1) \frac{\varepsilon_m - \varepsilon_e}{\varepsilon_m + (d-1)\varepsilon_e}$$

– ABG (Bruggeman asymétrique)

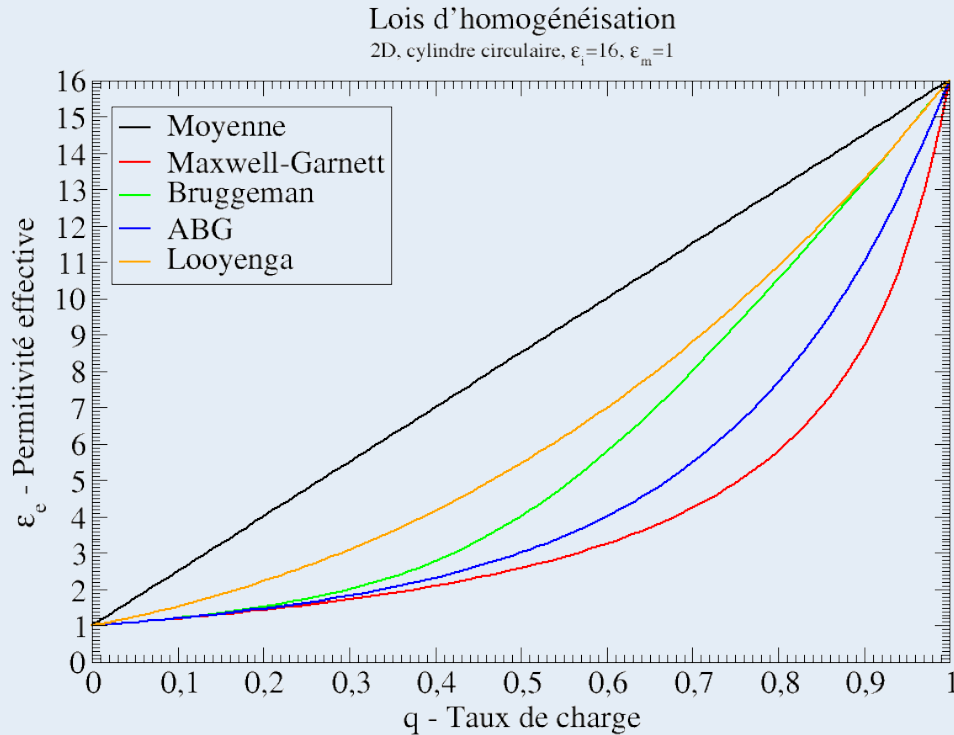
$$\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i - \varepsilon_m} = (1-q) \left(\frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_m} \right)^{1/d}$$

– Looyenga

$$\varepsilon_e = \left(q\varepsilon_i^{1/3} + (1-q)\varepsilon_m^{1/3} \right)^3$$

– Moyenne

$$\varepsilon_e = q\varepsilon_i + (1-q)\varepsilon_m$$



F.2 Test des lois d'homogénéisations sur un exemple de matériau composite 2D

Nous cherchons à savoir laquelle de ces méthodes est la meilleure et quelle est l'erreur relative faite sur l'homogénéisation. Pour cela, nous allons calculer numériquement la réflexion d'un milieu composite constitué de cylindres circulaires de taille identique et de permittivité ε_i . Nous considérerons trois taux de charge q (15.71%, 31.42%, 56.55%).

Nous calculons à l'aide de COMSOL, la réflexion pour un matériau composite constitué de cylindres circulaires de permittivité ε_i dans une matrice ε_m . Les cylindres sont de rayon $r = 0.01$ m et sont répartis sur une épaisseur de $e = 0.1$ m et de $L = 0.2$ m de large. La longueur d'onde est $\lambda = 1$ m.

F.2.1 Polarisation S

Nous considérons dans un premier temps la polarisation où le champ électrique est le long des cylindres (E_y , S). Nous choisissons des inclusions de permittivité $\varepsilon_i = 3$ dans une matrice $\varepsilon_m = 1.43$. Nous calculons pour chaque méthode la permittivité effective. Nous utilisons ensuite cette permittivité pour calculer la réflexion du milieu homogénéisé (solution analytique du slab homogène dans l'air) que nous comparons à celui du milieu composite calculé par COMSOL.

Nous obtenons alors les résultats regroupés dans le Tableau suivant :

Méthode	15.71%	31.42%	56.55%
Maxwell-Garnett	0.02773	0.04598	0.08846
Bruggeman	0.02800	0.04721	0.09233
ABG	0.02787	0.04658	0.09034
Looyenga	0.03025	0.05173	0.09844
Moyenne	0.03480	0.06093	0.11119
COMSOL	0.0353	0.0625	0.1123

Tableau F.1 – Réflexion du milieu homogénéisé de plusieurs lois et celle du milieu composite d'inclusion $\varepsilon_i = 3$ et de matrice $\varepsilon_m = 1.43$.

Nous constatons que la moyenne est la loi la mieux adaptée, comme nous l'avons déjà constaté dans la Section 7.2. En effet, nous avons remarqué l'absence de rayonnement dipolaire dans la carte des champs (cf. Figure 7.7b) pour cette polarisation. Effectivement, dans cette direction les cylindres sont infinis, il ne peuvent donc pas se comporter comme des dipôles diélectriques. C'est ce qui explique l'échec des méthodes d'homogénéisations (de la permittivité) de Maxwell-Granett et Bruggeman, dont la base est la solution de Laplace pour la sphère (rayonnement dipolaire) dans cette polarisation.

F.2.2 Polarisation P

Nous étudions ensuite un matériau d'inclusion $\varepsilon_i = 16$ dans une matrice d'air ($\varepsilon_m = 1$) dans la polarisation où le champ électrique est dans le plan (P, H_y) en incidence normale.

Nous obtenons la carte des champs pour un taux de charge de 15.71% présentée à la Figure F.2.

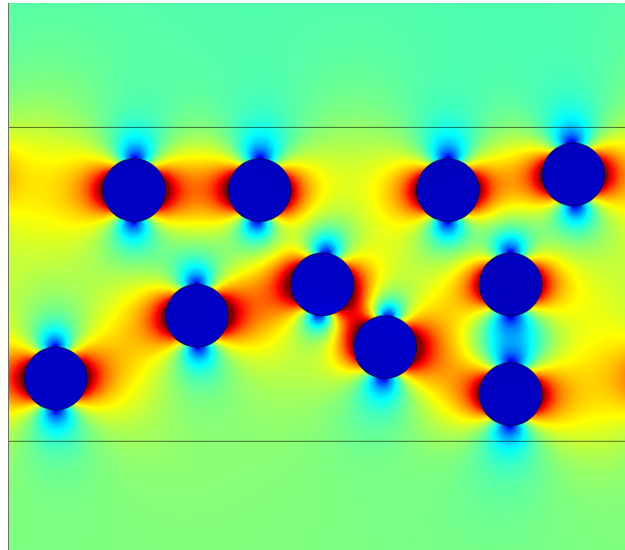


Figure F.2 – Carte du champ électrique dans le milieu composite d'un taux de charge de 15.71%.

Nous observons cette fois-ci le rayonnement dipolaire (diélectrique) attendu pour les méthodes d'homogénéisation.

Méthode	15.71%	31.42%	56.55%
Maxwell-Garnett	0.008489	0.043774	0.206179
Bruggeman	0.011253	0.080956	0.446149
ABG	0.009644	0.056339	0.290002
Looyenga	0.058351	0.238711	0.533943
Moyenne	0.256472	0.491712	0.623567
COMSOL	0.008601	0.065022	0.266088

Tableau F.2 – Réflexion du milieu homogénéisé de plusieurs lois et celle du milieu composite d'inclusion $\varepsilon_i = 16$.

Nous constatons cette fois-ci que la méthode de la moyenne n'est plus du tout adaptée. Les méthodes de Maxwell-Garnett et Bruggeman sont bien meilleures. Pour évaluer exactement l'efficacité des méthodes, nous avons pour cette polarisation calculé l'écart relatif avec la valeur exacte de COMSOL.

Méthode	15.71%	31.42%	56.55%
Maxwell-Garnett	1.302%	32.678%	22.515%
Bruggeman	30.834%	24.505%	67.670%
ABG	12.126%	13.354%	8.987%
Looyenga	578.421%	267.123%	100.664%
Moyenne	2881.886%	656.224%	134.346%

Tableau F.3 – Écart relatif de la réflexion entre le milieu composite d'inclusion $\varepsilon_i = 16$ et le milieu homogénéisé.

Nous constatons que pour les configurations choisies la méthode de Maxwell-Garnett est la mieux adaptée pour de faibles taux de charge alors que pour des taux de charge plus importants c'est la méthode ABG qui est la plus pertinente. Les méthodes de Looyenga et de la moyenne ne semblent pas du tout adaptées.

Nous recommandons l'étude pour des cylindres de permittivité $\varepsilon_i = 3$. Nous obtenons alors :

Méthode	15.71%	31.42%	56.55%
Maxwell-Garnett	0.002447	0.011282	0.045985
Bruggeman	0.002638	0.012913	0.054630
ABG	0.002539	0.012034	0.049981
Looyenga	0.004157	0.018120	0.064479
Moyenne	0.008104	0.030356	0.086412
COMSOL	0.002490	0.013433	0.051347

Tableau F.4 – Réflexion du milieu homogénéisé de plusieurs lois et celle du milieu composite d'inclusion $\varepsilon_i = 3$.

Et pour les écarts relatifs :

Méthode	15.71%	31.42%	56.55%
Maxwell-Garnett	1.726%	16.013%	10.443%
Bruggeman	5.944%	3.871%	6.394%
ABG	1.968%	10.415%	2.660%
Looyenga	66.948%	34.892%	25.575%
Moyenne	225.462%	125.981%	68.290%

Tableau F.5 – Écart relatif de la réflexion entre le milieu composite d'inclusion $\varepsilon_i = 3$ et le milieu homogénéisé.

Nous observons globalement une amélioration des prédictions pour l'ensemble des méthodes lorsque la permittivité des inclusions baisse. La méthode Maxwell-Garnett et ABG sont les plus performantes pour de faibles taux de charge. La méthode ABG reste la meilleure pour les forts taux de charge.

Annexe G

Diffusion par un multicouche rugueux

Il existe déjà de nombreuses méthodes calcul de la diffusion par des surfaces rugueuses. Cependant à l'instar de la diffusion volumique, il en existe peu pour des milieux magnétiques. L'apport de la contribution magnétique sur les surfaces rugueuses bien que moins essentielle que la diffusion volumique reste malgré tout nécessaire à une compréhension complète des phénomènes mis en jeu. C'est pourquoi, nous avons également développé un outil numérique de calcul du champ diffusé par un multicouche rugueux.

G.1 Établissement des équations

Comme pour le cas volumique, nous allons utiliser la théorie des distributions pour formuler le système d'équation à résoudre

G.1.1 Distribution de Heaviside pour une surface rugueuse

Considérons un dioptré rugueux représenté à la Figure G.1 situé en $z = h(x, y)$ séparant deux milieux de permittivités ε_1 et ε_2 et de perméabilité μ_1 et μ_2 . La fonction $h(x, y)$ décrit une faible fluctuation autour de l'interface plane située en $z = 0$

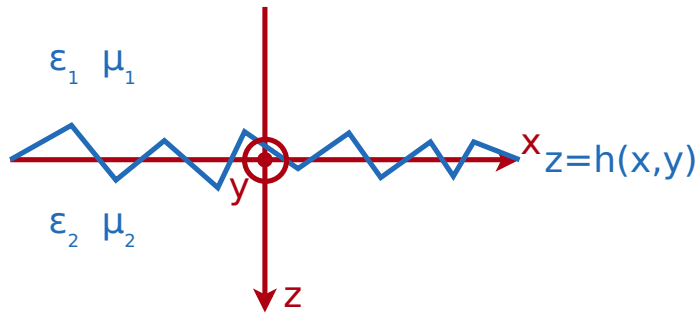


Figure G.1 – Représentation d'un dioptré rugueux.

Nous pouvons écrire l'ensemble des grandeurs discontinues ($\zeta = \varepsilon, \mu, \vec{E}$ ou \vec{H}) de telle sorte qu'elles deviennent des fonctions de (x, y, z) comme :

$$\begin{aligned} \zeta(x, y, z) &= \zeta_1 + \delta\zeta \mathcal{H}(z - h(x, y)) \\ \delta\zeta &= \zeta_2 - \zeta_1 \end{aligned} \tag{G.1}$$

G.1.2 Système d'équation pour un multicouche rugueux

De façon générale pour un multicouche nous avons donc :

$$\begin{aligned}\zeta(x, y, z) &= \zeta_1 + \sum_i \delta\zeta_i \mathcal{H}(z - h_i(x, y)) \\ \delta\zeta_i &= \zeta_{i+1} - \zeta_i\end{aligned}\quad (\text{G.2})$$

Les fonctions $h_i(x, y)$ décrivent une faible fluctuation autour des interfaces planes situées en z_i .

En procédant de la même façon que pour le cas volumique, et d'après la formule (B.12), nous obtenons le système d'équation pour le champ diffusé identique à celui du champ idéal :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_i^d(x, y, z) = +i\omega\mu_i \vec{H}_i^d(x, y, z) \quad (\text{G.3a})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}_i^d(x, y, z) = -i\omega\varepsilon_i \vec{E}_i^d(x, y, z) \quad (\text{G.3b})$$

Mais avec des conditions de raccordement aux interfaces spécifiques aux surfaces rugueuses :

$$\vec{n}_{h_i} \times \delta\vec{E}_i^d(x, y, h_i) = -\vec{n}_{h_i} \times \delta\vec{E}_i^0(x, y, h_i) \quad (\text{G.4a})$$

$$\vec{n}_{h_i} \times \delta\vec{H}_i^d(x, y, h_i) = -\vec{n}_{h_i} \times \delta\vec{H}_i^0(x, y, h_i) \quad (\text{G.4b})$$

Où \vec{n}_{h_i} est donné par $\vec{n}_{h_i} = \vec{z} - \vec{\nabla}h_i$.

Ces conditions de raccordements (G.4) ne sont pas pratiques à utiliser car les champs ne sont pas ceux aux interfaces planes idéales. Aussi, dans l'approximation du premier ordre et les fonctions $h_i(x, y)$ étant considérées comme étant d'amplitude faible, nous pouvons faire un développement limité autour de chaque z_i au premier ordre pour chaque fonction $h_i(x, y)$ des champs ($\vec{X} = \vec{E}_i^d, \delta\vec{E}_i^0, \vec{H}_i^d$ ou $\delta\vec{H}_i^0$) des équations (G.4) :

$$\vec{X}(x, y, z) \Big|_{z=h_i} = \vec{X}(x, y, z) \Big|_{z=z_i} + h_i(x, y) \frac{\partial \vec{X}(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{z=z_i} + \mathcal{O}(h_i^2) \quad (\text{G.5})$$

En injectant l'équation (G.5) dans les conditions de raccordement (G.4), nous obtenons de façon similaire les conditions sur les champs électrique et magnétique pour chaque interface. Nous avons par exemple pour le champ électrique à la première interface ($z_1 = 0$) :

$$\begin{aligned}& \vec{z} \times \delta\vec{E}^d(x, y, 0) - \vec{\nabla}h_1(x, y) \times \delta\vec{E}^d(x, y, 0) \\& + h_1(x, y) \vec{z} \times \frac{\partial \delta\vec{E}^d(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} - h(x, y) \vec{\nabla}h(x, y) \times \frac{\partial \delta\vec{E}^d(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} \\& = -\vec{z} \times \delta\vec{E}^0(x, y, 0) + \vec{\nabla}h_1(x, y) \times \delta\vec{E}^0(x, y, 0) \\& - h_1(x, y) \vec{z} \times \frac{\partial \delta\vec{E}^0(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} + h_1(x, y) \vec{\nabla}h_1(x, y) \times \frac{\partial \delta\vec{E}^0(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{z=0}\end{aligned}\quad (\text{G.6})$$

Comme nous nous limitons au premier ordre en h_i (ici h_1), nous négligeons les termes en **rouge**, de plus comme le champ diffusé est d'ordre un (d'après la théorie des perturbations) nous négligeons également le terme en **bleu**. Le terme en **vert** est nul en raison de

la condition de raccordement du champ idéal. Finalement les conditions de raccordement s'écrivent pour chaque interface $z = z_i$:

$$\vec{z} \times \delta \vec{E}_i^d(x, y, z_i) = \vec{\nabla} h_i(x, y) \times \delta \vec{E}_i^0(x, y, z_i) - h_i(x, y) \vec{z} \times \frac{\partial \delta \vec{E}_i^0(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{z=z_i} \quad (\text{G.7a})$$

$$\vec{z} \times \delta \vec{H}_i^d(x, y, z_i) = \vec{\nabla} h_i(x, y) \times \delta \vec{H}_i^0(x, y, z_i) - h_i(x, y) \vec{z} \times \frac{\partial \delta \vec{H}_i^0(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{z=z_i} \quad (\text{G.7b})$$

Le problème de diffusion pour une multicouche rugueux est donc transformé en un calcul de champ dans un multicouche plan (équations G.3) avec des conditions de raccordement aux interfaces spécifiques à la forme de la rugosité (équations G.7).

G.2 Résolution par les matrices

Le système d'équation (G.3) est le même que pour le champ homogène. La solution est donc la même (1.32). Cependant, les coefficients (\vec{A}) seront différents car les conditions de raccordement sont différentes.

$$\vec{z} \times \delta \vec{E}_i^d(x, y, z_i) = \vec{M}_i(x, y) \quad (\text{G.8a})$$

$$\vec{z} \times \delta \vec{H}_i^d(x, y, z_i) = \vec{J}_i(x, y) \quad (\text{G.8b})$$

Avec

$$\vec{M}_i(x, y) = \vec{\nabla} h_i(x, y) \times \delta \vec{E}_i^0(x, y, z_i) - h_i(x, y) \vec{z} \times \frac{\partial \delta \vec{E}_i^0(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{z=z_i} \quad (\text{G.8c})$$

$$\vec{J}_i(x, y) = \vec{\nabla} h_i(x, y) \times \delta \vec{H}_i^0(x, y, z_i) - h_i(x, y) \vec{z} \times \frac{\partial \delta \vec{H}_i^0(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{z=z_i} \quad (\text{G.8d})$$

Les sources de surface sont entièrement déterminées avec le champ idéal. Ces termes donc font partie du second membre, constitué du Bloc $S_r(i)$ suivant :

$$\boxed{\begin{pmatrix} M_{i,y} \\ -M_{i,x} \\ J_{i,x} \\ J_{i,y} \end{pmatrix}} \quad (\text{G.9})$$

qui se répète n -fois avec l'indice i qui correspond au numéro du milieu et le reste est nul.

La matrice à inverser est la même que pour le cas homogène (cf. Section 2.4).

Le système à résoudre est donc :

$$\bar{\bar{W}} \bar{\bar{A}}_r^d = \begin{pmatrix} S_r(1) \\ S_r(2) \\ S_r(3) \\ \vdots \\ \frac{S_r(n)}{0} \\ \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{G.10})$$

G.3 Validation d'après la littérature

Nous reprenons les cas présentés dans [34, 22] comme à la Section 2.7. Nous considérons une couche de diélectrique déposée sur un verre semi-infini d'indice de réfraction $n = 1.539$. Le spectre de rugosité γ_h est donné par la transformée de Fourier de la somme d'une Gaussienne et d'une exponentielle (2.18). Les paramètres δ_e , L_e , δ_g et L_g sont les suivants : $\delta_e = 1$ nm, $L_e = 2000$ nm, $\delta_g = 0.5$ nm et $L_g = 200$ nm.

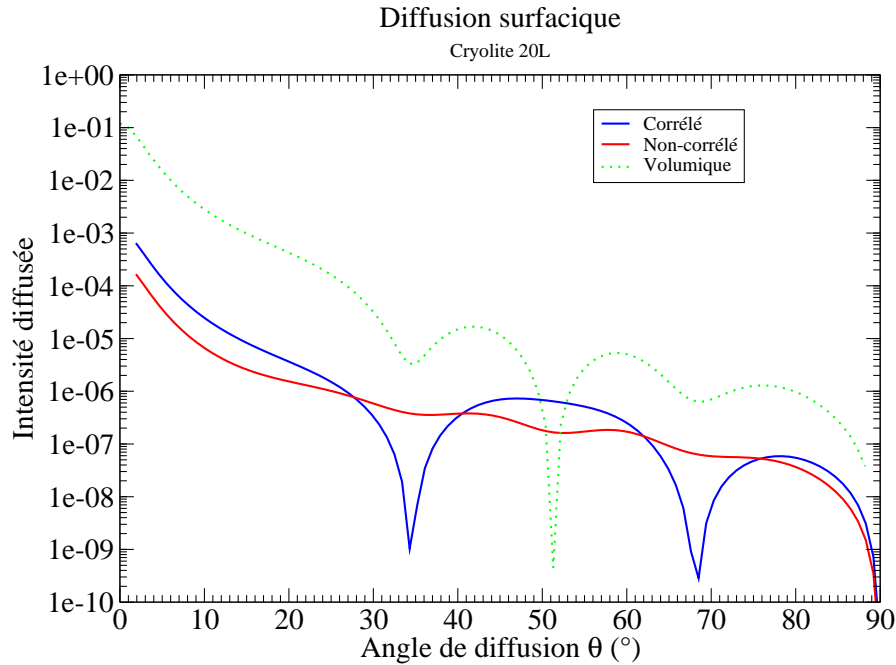


Figure G.2 – Diffusion surfacique en réflexion d'un monocouche sur verre.

La diffusion de surface est calculée pour deux types de rugosité : l'une corrélée (les deux interfaces ont la même fonction $h_1 = h_2$) et l'autre non-corrélée (seule la première

interface est rugueuse $h_2 = 0$). Le monocouche est constitué de cryolite 20L (Na_3AlF_6 , $n_L = 1.3$) soit une épaisseur $e = 20\lambda/4n_L$. Les résultats sont donnés en Figure G.2 pour un éclairage normal ($i_0 = \psi = 0$) à la longueur d'onde $\lambda = 633$ nm pour les deux polarisations (SS et PP). La moyenne des intensités des deux polarisations est présentée comme dans la référence [34]. Nous affichons aussi le résultat pour la diffusion volumique pour mémoire.

Nous observons un très bon accord entre la référence [34] et notre méthode.

Annexe H

Démonstration de la formule pour le maximum de réflexion d'un miroir de Bragg

Un miroir de Bragg est un empilement périodique de deux couches (d'indice n_1 et n_2), d'épaisseur adaptée e_i à la longueur d'onde dans le milieu λ_i pour avoir $e_i = \lambda_i/2$.

H.1 Rappel des équations nécessaires

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_i - \imath\omega\mu_i\vec{H}_i = \vec{0} \quad (\text{H.1})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}_i + \imath\omega\varepsilon_i\vec{E}_i = \vec{0} \quad (\text{H.2})$$

$$\hat{\vec{E}}_i(\vec{\sigma}, z) = \vec{A}_i^+(\vec{\sigma}) e^{\imath\alpha_i(\sigma)z} + \vec{A}_i^-(\vec{\sigma}) e^{-\imath\alpha_i(\sigma)z} \quad (\text{H.3})$$

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda_0} \quad (\text{H.4})$$

$$k_i^2 = \omega^2 \mu_0 \mu_i \varepsilon_0 \varepsilon_i \quad (\text{H.5})$$

$$\alpha^2(\sigma) = k^2 - \sigma^2 \quad (\text{H.6})$$

$$\sigma^2 = k_0^2 \sin^2 \theta \quad (\text{H.7})$$

H.2 Matrice de couche

La matrice de couche permet de calculer le champ au bas de la couche depuis le champ en haut (en restant dans la couche).

$$\hat{\vec{E}}_i(\vec{\sigma}, e_i) = \hat{\vec{E}}_i^+(\vec{\sigma}, e_i) + \hat{\vec{E}}_i^-(\vec{\sigma}, e_i) = \hat{\vec{E}}_i^+(\vec{\sigma}, 0) e^{\imath\alpha_i e_i} + \hat{\vec{E}}_i^-(\vec{\sigma}, 0) e^{-\imath\alpha_i e_i} \quad (\text{H.8})$$

$$\begin{pmatrix} \vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{\vec{E}}_i^-(\vec{\sigma}, 0) \right) \\ \vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{\vec{E}}_i^+(\vec{\sigma}, 0) \right) \end{pmatrix} = C_i \begin{pmatrix} \vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{\vec{E}}_i^-(\vec{\sigma}, e_i) \right) \\ \vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{\vec{E}}_i^+(\vec{\sigma}, e_i) \right) \end{pmatrix} \quad (\text{H.9})$$

$$C_i = \begin{pmatrix} e^{-\imath\alpha_i e_i} & 0 \\ 0 & e^{\imath\alpha_i e_i} \end{pmatrix} \quad (\text{H.10})$$

H.3 Matrice de transfert

La matrice de transfert permet de passer d'une couche à l'autre, depuis le bas d'une couche au haut de la couche suivante (au niveau de l'interface).

Nous exprimons à l'aide des équations de Maxwell, le champ magnétique en fonction du champ électrique comme :

$$\begin{aligned} \hat{\vec{H}}_i = \frac{1}{\omega\mu_0\mu_i} & \left[\vec{\sigma} \times \left(\vec{A}_i^+(\vec{\sigma})e^{\imath\alpha_i(\sigma)z} + \vec{A}_i^-(\vec{\sigma})e^{-\imath\alpha_i(\sigma)z} \right) \right. \\ & \left. + \alpha_i(\sigma)\vec{z} \times \left(\vec{A}_i^+(\vec{\sigma})e^{\imath\alpha_i(\sigma)z} - \vec{A}_i^-(\vec{\sigma})e^{-\imath\alpha_i(\sigma)z} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{H.11})$$

En remplaçant dans les conditions d'interfaces :

$$\vec{z} \times \delta \vec{E}_j(x, y, z_j) = \vec{0} \quad (\text{H.12})$$

$$\vec{z} \times \delta \vec{H}_j(x, y, z_j) = \vec{0} \quad (\text{H.13})$$

$$\hat{\vec{E}}_i^+ + \hat{\vec{E}}_i^- = \hat{\vec{E}}_{i+1}^+ + \hat{\vec{E}}_{i+1}^- \quad (\text{H.14})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega\mu_i} \vec{z} \times \left[\vec{\sigma} \times \left(\vec{E}_i^+ + \vec{E}_i^- \right) + \alpha_i(\sigma)\vec{z} \times \left(\vec{E}_i^+ - \vec{E}_i^- \right) \right] = \\ \frac{1}{\omega\mu_{i+1}} \vec{z} \times \left[\vec{\sigma} \times \left(\vec{E}_{i+1}^+ + \vec{E}_{i+1}^- \right) + \alpha_{i+1}(\sigma)\vec{z} \times \left(\vec{E}_{i+1}^+ - \vec{E}_{i+1}^- \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{H.15})$$

La polarisation S (ou TE ou H_{\parallel}) correspond à un champ électrique perpendiculaire au plan d'incidence. Ainsi :

$$\vec{z} \cdot \hat{\vec{E}}'_i = 0$$

$$\frac{\alpha_i}{\mu_i} \vec{z} \times \left[\vec{z} \times \left(\vec{E}_i^+ - \vec{E}_i^- \right) \right] = \frac{\alpha_{i+1}}{\mu_{i+1}} \vec{z} \times \left[\vec{z} \times \left(\vec{E}_{i+1}^+ - \vec{E}_{i+1}^- \right) \right] \quad (\text{H.16})$$

Le système d'équations :

$$\vec{z} \times \left[\vec{z} \times \left(\hat{\vec{E}}_i^+ + \hat{\vec{E}}_i^- \right) \right] = \vec{z} \times \left[\vec{z} \times \left(\hat{\vec{E}}_{i+1}^+ + \hat{\vec{E}}_{i+1}^- \right) \right] \quad (\text{H.17a})$$

$$\frac{\alpha_i}{\mu_i} \vec{z} \times \left[\vec{z} \times \left(\vec{E}_i^+ - \vec{E}_i^- \right) \right] = \frac{\alpha_{i+1}}{\mu_{i+1}} \vec{z} \times \left[\vec{z} \times \left(\vec{E}_{i+1}^+ - \vec{E}_{i+1}^- \right) \right] \quad (\text{H.17b})$$

s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{\alpha_i}{\mu_i} & \frac{\alpha_i}{\mu_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{E}_i^- \right) \\ \vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{E}_i^+ \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{\alpha_{i+1}}{\mu_{i+1}} & \frac{\alpha_{i+1}}{\mu_{i+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{E}_{i+1}^- \right) \\ \vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{E}_{i+1}^+ \right) \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} \vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{E}_i^- \right) \\ \vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{E}_i^+ \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{\alpha_i}{\mu_i} & \frac{\alpha_i}{\mu_i} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{\alpha_{i+1}}{\mu_{i+1}} & \frac{\alpha_{i+1}}{\mu_{i+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{E}_{i+1}^- \right) \\ \vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{E}_{i+1}^+ \right) \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{\alpha_i}{\mu_i} & \frac{\alpha_i}{\mu_i} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{\alpha_{i+1}}{\mu_{i+1}} & \frac{\alpha_{i+1}}{\mu_{i+1}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\frac{\alpha_i}{\mu_i}} \begin{pmatrix} \frac{\alpha_i}{\mu_i} & -1 \\ \frac{\mu_i}{\alpha_i} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{\alpha_{i+1}}{\mu_{i+1}} & \frac{\alpha_{i+1}}{\mu_{i+1}} \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{\alpha_i}{\mu_i} & \frac{\alpha_i}{\mu_i} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{\alpha_{i+1}}{\mu_{i+1}} & \frac{\alpha_{i+1}}{\mu_{i+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\frac{\alpha_i}{\mu_i} + \frac{\alpha_{i+1}}{\mu_{i+1}}}{2\frac{\alpha_i}{\mu_i}} & \frac{\frac{\alpha_i}{\mu_i} - \frac{\alpha_{i+1}}{\mu_{i+1}}}{2\frac{\alpha_i}{\mu_i}} \\ \frac{\frac{\alpha_i}{\mu_i} - \frac{\alpha_{i+1}}{\mu_{i+1}}}{2\frac{\alpha_i}{\mu_i}} & \frac{\frac{\alpha_i}{\mu_i} + \frac{\alpha_{i+1}}{\mu_{i+1}}}{2\frac{\alpha_i}{\mu_i}} \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} \vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{E}_i^- \right) \\ \vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{E}_i^+ \right) \end{pmatrix} = T_{i+1}^i \begin{pmatrix} \vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{E}_{i+1}^- \right) \\ \vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{E}_{i+1}^+ \right) \end{pmatrix} \tag{H.18}
\end{aligned}$$

$$T_{i+1}^i = \begin{pmatrix} \frac{\frac{\alpha_i}{\mu_i} + \frac{\alpha_{i+1}}{\mu_{i+1}}}{2\frac{\alpha_i}{\mu_i}} & \frac{\frac{\alpha_i}{\mu_i} - \frac{\alpha_{i+1}}{\mu_{i+1}}}{2\frac{\alpha_i}{\mu_i}} \\ \frac{\frac{\alpha_i}{\mu_i} - \frac{\alpha_{i+1}}{\mu_{i+1}}}{2\frac{\alpha_i}{\mu_i}} & \frac{\frac{\alpha_i}{\mu_i} + \frac{\alpha_{i+1}}{\mu_{i+1}}}{2\frac{\alpha_i}{\mu_i}} \end{pmatrix} \tag{H.19}$$

H.4 Calcul du coefficient de réflexion de l'empilement

On a donc

$$\begin{pmatrix} \vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{E}_i^- (\vec{\sigma}, 0) \right) \\ \vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{E}_i^+ (\vec{\sigma}, 0) \right) \end{pmatrix} = M_i T_{i+1}^i \begin{pmatrix} \vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{E}_{i+1}^- (\vec{\sigma}, 0) \right) \\ \vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{E}_{i+1}^+ (\vec{\sigma}, 0) \right) \end{pmatrix} \tag{H.20}$$

avec : $M_i = T_{i+1}^i C_{i+1}$

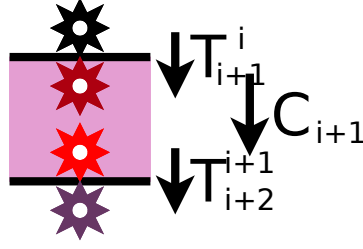


Figure H.1 – Représentation des matrices de couches et de passages pour une couche i .

Que l'on peut généraliser pour un empilement de $2nb$ couches+2 (avec $\vec{E}_{2nb+2}^+ = \vec{0}$)

$$\begin{pmatrix} \vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{\vec{E}}_1^-(\vec{\sigma}, 0) \right) \\ \vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{\vec{E}}_1^+(\vec{\sigma}, 0) \right) \end{pmatrix} = \prod_{i=0}^{2nb} M_i T_{2nb+2}^{2nb+1} \begin{pmatrix} \vec{z} \times \left(\vec{z} \times \hat{\vec{E}}_{2nb+2}^-(\vec{\sigma}, 0) \right) \\ \vec{0} \end{pmatrix} \quad (\text{H.21})$$

Le coefficient de réflexion en champ r est défini par :

$$r = \frac{\vec{E}_1^+}{\vec{E}_1^-} \quad (\text{H.22})$$

D'où

$$r = \frac{\left(\prod_{i=0}^{2nb+1} M_i T_{2nb+2}^{2nb+1} \right)_{(21)}}{\left(\prod_{i=0}^{2nb+1} M_i T_{2nb+2}^{2nb+1} \right)_{(11)}} \quad (\text{H.23})$$

avec $X_{(ij)}$ la composante (ij) de la matrice X

$$X = \begin{pmatrix} X_{(11)} & X_{(12)} \\ X_{(21)} & X_{(22)} \end{pmatrix} \quad (\text{H.24})$$

Pour le miroir de Bragg, un empilement périodique (de période $a = e_1 + e_2$) dans l'air d'un motif constitué de couche n_1 et n_2 d'épaisseur optique $e_i = \frac{\lambda}{4n_i}$, pour une incidence $\theta = 0$.

$$R = |r|^2 = \left[\frac{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^{2nb}}{1 + \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^{2nb}} \right]^2 \quad (\text{H.25})$$

Ce qui peut encore s'écrire sous la forme d'une tangente hyperbolique ($a^x = \exp(x \ln(a))$) :

$$R = |r|^2 = \tanh^2 \left[2nb \ln \left(\frac{n_1}{n_2} \right) \right] \quad (\text{H.26})$$

Annexe I

Méthode des ondes planes

Les cristaux photoniques [11] sont des milieux électromagnétiques structurés périodiques, possédant généralement des bandes photoniques interdites : gamme de fréquence où les ondes ne peuvent pas se propager dans la structure.

Lord Rayleigh introduit en 1887, la notion de bandes interdites en 1D. Mais ce n'est qu'en 1987 que le terme de cristal photonique apparaît avec Yablonovitch [73] et John [74]. Leurs travaux combinant l'électrodynamique classique et la physique de l'état solide, ont conduit à l'introduction du concept de bandes interdites en 2D et 3D.

I.1 Équations de Maxwell

Les cristaux photoniques sont considérés comme linéaires, isotropes, sans charge ni courant et sans pertes. Les champs vérifient en dépendance temporelle harmoniques ($e^{-i\omega t}$), les équations de Maxwell :

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) + i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0} \quad (\text{I.1a})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) - i\omega\mu_0\vec{H}(\vec{r}) = \vec{0} \quad (\text{I.1b})$$

Après l'élimination du champ électrique ou magnétique en appliquant le rotationnel $\vec{\nabla} \times$, nous obtenons une équation portant sur le champ magnétique ou sur le champ électrique :

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{\varepsilon_r(\vec{r})} \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) \right] = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \vec{H}(\vec{r})} \quad (\text{I.2a})$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) \right] = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \varepsilon_r(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r})} \quad (\text{I.2b})$$

La permittivité du cristal photonique étant périodique, le théorème de Floquet-Bloch peut s'appliquer. Les champs peuvent s'écrire comme une décomposition en ondes planes :

$$\vec{H}(\vec{r}) = \tilde{\vec{H}}(\vec{r}) e^{i\vec{k}_F \cdot \vec{r}} \quad (\text{I.3a})$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \tilde{\vec{E}}(\vec{r}) e^{i\vec{k}_F \cdot \vec{r}} \quad (\text{I.3b})$$

où \vec{k}_F est le vecteur de Floquet, avec $\tilde{H}(\vec{r})$ et $\tilde{E}(\vec{r})$, des fonctions périodiques de même périodicité que ε_r .

En remplaçant (I.2a) dans (I.3a) et (I.2b) dans (I.3b), les équations deviennent :

$$\left(\vec{k}_F + \vec{\nabla}\right) \times \left[\frac{1}{\varepsilon_r(\vec{r})} \left(\vec{k}_F + \vec{\nabla}\right) \times \tilde{H}(\vec{r}) \right] = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \tilde{H}(\vec{r}) \quad (\text{I.4a})$$

$$\left(\vec{k}_F + \vec{\nabla}\right) \times \left[\left(\vec{k}_F + \vec{\nabla}\right) \times \tilde{E}(\vec{r}) \right] = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_r(\vec{r}) \tilde{E}(\vec{r}) \quad (\text{I.4b})$$

I.2 Théorème de Floquet-Bloch

Le théorème de Floquet-Bloch permet d'écrire les champs dans un milieu périodique sous la forme d'une décomposition en ondes planes et d'une fonction périodique ayant la même périodicité que le milieu. Cette fonction étant périodique, elle peut-être décomposée en série de Fourier et peut ainsi s'exprimer dans le réseau réciproque (techniquement le réseau réciproque est la transformée de Fourier du réseau direct).

I.2.1 Notion de réseau réciproque

Soit \vec{e}_i les vecteurs du réseau direct du cristal. Il existe un réseau réciproque dont les vecteurs primitifs sont notés \vec{e}_i^* . Les vecteurs des deux réseaux sont reliés par :

$$\boxed{\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j^* = 2\pi\delta_{ij}} \quad (\text{I.5})$$

Les vecteurs \vec{G}_n de l'espace des transformées de Fourier sont alors donnés par :

$$\boxed{\vec{G}_n = \sum_i n_i \vec{e}_i^*} \quad (\text{I.6})$$

Pour différentes valeurs de $n_i \in \mathbb{Z}$, i étant le nombre de dimension (de périodicité) du cristal.

I.2.2 Transformée de Fourier discrète

Soient $\vec{V}(\vec{r})$ et $\vec{U}(\vec{r})$, des fonctions périodiques. Il est possible de les représenter en série de Fourier comme :

$$\vec{V}(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}} \vec{V}(\vec{G}) e^{i\vec{G} \cdot \vec{r}} \quad (\text{I.7a})$$

$$\vec{U}(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}} \vec{U}(\vec{G}) e^{i\vec{G} \cdot \vec{r}} \quad (\text{I.7b})$$

La fonction $\vec{W}(\vec{r}) = \vec{V}(\vec{r})\vec{U}(\vec{r})$ a sa série de Fourier donnée par :

$$\vec{W}(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}} \vec{W}(\vec{G}) e^{i\vec{G} \cdot \vec{r}} \quad (\text{I.8})$$

où $\vec{W}(\vec{G})$ sont les transformées de Fourier discrètes données par :

$$\vec{W}(\vec{G}) = (\vec{V}(\vec{G}) * \vec{U}(\vec{G})) = \sum_{\vec{G}'} \vec{V}(\vec{G}') \vec{U}(\vec{G} - \vec{G}') \quad (\text{I.9})$$

Donc :

$$\vec{W}(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}} \sum_{\vec{G}'} \vec{V}(\vec{G}') \vec{U}(\vec{G} - \vec{G}') e^{i\vec{G} \cdot \vec{r}} \quad (\text{I.10})$$

Finalement, la série de Fourier du produit $\vec{V}(\vec{r}) \vec{U}(\vec{r})$ est donnée par :

$$\boxed{\vec{V}(\vec{r}) \vec{U}(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}} \sum_{\vec{G}'} \vec{V}(\vec{G}') \vec{U}(\vec{G} - \vec{G}') e^{i\vec{G} \cdot \vec{r}}} \quad (\text{I.11})$$

I.3 Méthode E

Pour calculer les structures de bandes, on peut partir de l'équation sur le champ électrique :

$$(\vec{k}_F + \vec{\nabla}) \times [(\vec{k}_F + \vec{\nabla}) \times \vec{E}(\vec{r})] = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_r(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r})$$

Il est possible de décomposer le champ en série de Fourier. Ainsi, en utilisant la propriété (I.11), l'équation devient :

$$\sum_{\vec{G}} (\vec{k}_F + \vec{\nabla}) \times [(\vec{k}_F + \vec{\nabla}) \times (\vec{E}(\vec{G}) e^{i\vec{G} \cdot \vec{r}})] = \sum_{\vec{G}} \sum_{\vec{G}'} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_r(\vec{G}') \vec{E}(\vec{G} - \vec{G}') e^{i\vec{G} \cdot \vec{r}}$$

avec $\varepsilon_r(\vec{G})$ la transformée de Fourier de la fonction répartissant la permittivité d'une période de la structure :

$$\varepsilon_r(\vec{G}) = \frac{1}{V_{cell}} \iiint \varepsilon_r(\vec{\rho}) e^{-i\vec{G} \cdot \vec{\rho}} d\vec{\rho}$$

Le calcul des rotationnel conduit à :

$$\sum_{\vec{G}} (\vec{k}_F + \vec{G}) \times [(\vec{k}_F + \vec{G}) \times \vec{E}(\vec{G})] e^{i\vec{G} \cdot \vec{r}} = - \sum_{\vec{G}} \sum_{\vec{G}'} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_r(\vec{G}') \vec{E}(\vec{G} - \vec{G}') e^{i\vec{G} \cdot \vec{r}}$$

En identifiant les coefficients des exponentielles pour chaque \vec{G} , l'équation devient finalement :

$$\boxed{(\vec{k}_F + \vec{G}) \times [(\vec{k}_F + \vec{G}) \times \vec{E}(\vec{G})] = - \sum_{\vec{G}'} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_r(\vec{G}') \vec{E}(\vec{G} - \vec{G}')} \quad (\text{I.12})$$

I.4 Méthode H

On peut également calculer les structures de bandes en utilisant l'équation sur le champ magnétique :

$$\left(\vec{k}_F + \vec{\nabla}\right) \times \left[\frac{1}{\varepsilon_r(\vec{r})} \left(\vec{k}_F + \vec{\nabla}\right) \times \vec{H}(\vec{r}) \right] = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \vec{H}(\vec{r})$$

Pour simplifier l'inverse de la permittivité est notée :

$$\frac{1}{\varepsilon_r(\vec{r})} = \eta(\vec{r})$$

En décomposant en série de Fourier et en utilisant la propriété (I.11), l'équation devient :

$$\sum_{\vec{G}} \sum_{\vec{G}'} \left(\vec{k}_F + \vec{\nabla}\right) \times \left[\eta(\vec{G} - \vec{G}') \left\{ \left(\vec{k}_F + \vec{\nabla}\right) \times \vec{H}(\vec{G}') \right\} e^{i\vec{G} \cdot \vec{r}} \right] = \sum_{\vec{G}} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \vec{H}(\vec{G}) e^{i\vec{G} \cdot \vec{r}}$$

avec $\eta(\vec{G})$ la transformée de Fourier de l'inverse de la permittivité. Il est possible grâce à la méthode de Ho [75] de la remplacer par l'inverse de la transformée de Fourier de la permittivité.

Le calcul du rotationnel conduit à :

$$\sum_{\vec{G}} \sum_{\vec{G}'} \eta(\vec{G} - \vec{G}') \left(\vec{k}_F + \vec{G}\right) \times \left[\left(\vec{k}_F + \vec{G}'\right) \times \vec{H}(\vec{G}') \right] e^{i\vec{G} \cdot \vec{r}} = - \sum_{\vec{G}} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \vec{H}(\vec{G}) e^{i\vec{G} \cdot \vec{r}}$$

En identifiant les coefficients des exponentielles pour chaque \vec{G} , l'équation devient finalement :

$$\boxed{\sum_{\vec{G}'} \eta(\vec{G} - \vec{G}') \left(\vec{k}_F + \vec{G}\right) \times \left[\left(\vec{k}_F + \vec{G}'\right) \times \vec{H}(\vec{G}') \right] = - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \vec{H}(\vec{G})} \quad (\text{I.13})$$

Bibliographie

- [1] M. Ney. *Technique de l'Ingénieur*, **E1020**, (2004).
- [2] J.-P. Gérard. *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, **14**, 297–312, (1961).
- [3] J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins et W. J. Stewart. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, **47**, 2075–2084, (1999).
- [4] J. B. Pendry. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, **85**, 3966–3969, (2000).
- [5] N. Fang, H. Lee, C. Sun et X. Zhang. *Science*, **308**, 534–537, (2005).
- [6] V. M. Shalaev. *Nat. Photon.*, **1**, 41–48, (2007).
- [7] D. R. Smith, J. B. Pendry et M. C. K. Wiltshire. *Science*, **305**, 788–792, (2004).
- [8] J. Valentine, J. Li, T. Zentgraf, G. Bartal et X. Zhang. *Nat. Mat.*, **8**, 568–571, (2009).
- [9] B. Wood. *Laser and Photon. Rev.*, **1**, 249–259, (2007).
- [10] H. Chen, C. T. Chan et P. Sheng. *Nat. Mat.*, **9**, 387–396, (2010).
- [11] J. D. Joannopoulos et R. D. Meade and J. N. Winn. *Photonic Crystals : Molding the Flow of Light*. Princeton : Princeton University Press, (1995).
- [12] D. W. Prather, S. Shi, A. Sharkawy, J. Murakowski et G. J. Schneider. *Photonic crystals – Theory, applications, and fabrication*. John Wiley & Sons, (2009).
- [13] J. M. Lourtioz et al. *Les cristaux photoniques ou la lumière en cage*. Hermes Science, (2003).
- [14] G. Mie. *Ann. Phys. Leipzig*, **25**, 377–445, (1908).
- [15] C. F. Bohren et D. R. Huffman. *Absorption and scattering light by small particles*. John Wiley & Sons, Inc., (1983).
- [16] H. C. van de Hulst. *Light scattering by small particles*. Dover Publications, Inc., (1981).
- [17] M. Saillard et A. Sentenac. *Waves Random Media*, **11**, R103–R137, (2001).
- [18] K. F. Warnick et W. C. Chew. *Waves Random Media*, **11**, R1–R30, (2001).
- [19] T. M. Elfouhaily et C.-A. Guérin. *Waves Random Media*, **14**, R1–R40, (2004).
- [20] D. H. Berman et J. S. Perkins. *J. Acoust. Soc. Am.*, **78**, 1045–1051, (1985).
- [21] S. O. Rice. *Commun. on Pure and Appl. Math.*, **4**, 351–378, (1951).
- [22] É. Dieudonné, N. Malléjac, C. Amra et S. Enoch. *J. Opt. Soc. Am. A*, **30**, 1772–1779, (2013).
- [23] X. Yuan. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, **38**, 1053–1058, (1990).

- [24] P. G. Petropoulos et G. A. Kriegsmann. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **39**, 1119–1124, (1991).
- [25] X. Yuan, D. R. Lynch et J. W. Strohbehn. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **38**, 386–393, (1990).
- [26] C. D. Jones et D. R. Jackson. *IEEE J. Ocean. Eng.*, **26**, 84–93, (2001).
- [27] C. Onier, A. Chanzy, A. Chambarel, R. Rouveure, M. Chanet et H. Bolvin. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, **49**, 415–425, (2011).
- [28] A. Dunn, C. Smithpeter, A. J. Welch et R. Richards-Kortum. *J. Biomed. Opt.*, **2**, 262–266, (1997).
- [29] P. Bousquet, F. Flory et P. Roche. *J. Opt. Soc. Am.*, **71**, 1115–1123, (1981).
- [30] J. M. Elson. *Phys. Rev. B.*, **30**, 5460–5480, (1984).
- [31] C. Amra. *J. Opt. Soc. Am. A*, **10**, 365–374, (1993).
- [32] L. Schwartz. *Théorie des distributions*. Hermann, (2010).
- [33] R. E. Collin. *Field theory of guided waves*. IEEE Press, p. 29, (1991).
- [34] C. Amra, C. Grèzes-Besset et L. Bruel. *Appl. Opt.*, **32**, 5492–5503, (1993).
- [35] R. Petit. *L’outil mathématique pour la physique*. Dunod, Chap. V, (1998).
- [36] Y. Rahmat-Samii. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, **23**, 762–765, (1975).
- [37] B. S. Blaisse. *J. Phys. Rad.*, **11**, 315–320, (1950).
- [38] C. Amra et C. Grèzes-Besset. *Technique de l’Ingénieur*, **AF 3 348**, (2011).
- [39] É. Dieudonné, N. Malléjac et S. Enoch. *Opt. Exp.*, **22** 16558–16570, (2014).
- [40] H. A. Lorentz. *Amsterdammer Akademie der Wetenschappen*, **4**, 176, (1896).
- [41] T. H. Crowley. *J. Appl. Phys.*, **25**, 119–120, (1954).
- [42] V. H. Rumsey. *Phys. rev.*, **94**, 1483–1491, (1954).
- [43] D. S. Saxon. *Phys. rev.*, **100**, 1771–1775, (1955).
- [44] M. Nieto-Vesperinas et E. Wolf. *J. Opt. Soc. Am. A.*, **3**, 2038–2046, (1986).
- [45] M. Nieto-Vesperinas. *J. Opt. Soc. Am. A.*, **5**, 360–365, (1988).
- [46] C.-T. Tai. *IEEE Transactions on antennas and propagation*, **40**, 675–681, (1992).
- [47] S. C. Hill, G. Videen et J. D. Pendleton. *J. Opt. Soc. Am. B*, **14**, 2522–2529, (1997).
- [48] R. Carminati, M. Nieto-Vesperinas et J.-J. Greffet. *J. Opt. Soc. Am. A*, **15**, 706–712, (1998).
- [49] B. Polat. *IEEE Antennas and propagation magazine*, **49**, 74–83, (2007).
- [50] K. Yegin. *Progress in electromagnetics research M*, **23**, 79–91, (2012).
- [51] V. G. Veselago. *Soviet Physics Uspekhi*, **10**, 509–514, (1968).
- [52] C. C. Fisenmaier, Y. Huo et P. B. Catrysse. *Opt. Exp.*, **16**, 20457–20470, (2008).
- [53] R. J. Spry et D. J. Kosan. *Appl. Spectro.*, **40**, 782–784, (1986).
- [54] Opal– AG (Opale noble ou précieuse)– Carbonea Mine, La Trinidad, Mun. de Tequisquiapan, Queretaro, Mexique, *By Didier Descouens (Own work) [GFDL (<http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html>) or CC-BY-SA-3.0-2.5-2.0-1.0 (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0>)]*, via Wikimedia Commons (2009).

- [55] B. Lange, F. Fleischhaker et R. Zentel. *Macromol. Rapid Commun.*, **28**, 1291–1311, (2007).
- [56] Y. V. Miklyaev *et al.* *Appl. Phys. Let.*, **82**, 1284–1286, (2003).
- [57] R. M. Almeida et S. Portal. *Curr. Opin. Solid. State Mater. Sci.*, **7**, 151–157, (2003).
- [58] H. Míguez *et al.* *Langmuir*, **13**, 6009–6011, (1997).
- [59] N. Stöber, A. Fink et E. Bohn. *J. Colloid Interface Sci.*, **26**, 62–69, (1968).
- [60] Y. A. Vlasov, X.-Z. Bo, J. C. Sturm et D. J. Norris. *Nature*, **414**, 289–293, (2001).
- [61] P. Jiang, J. F. Bertone, K. S. Hwang et V. L. Colvin. *Chem. Mater*, **11**, 2132–2140, (1999).
- [62] F. Benoit. *Développement de cristaux photoniques par procédé sol-gel pour des applications laser de puissance*. Thèse, Université François Rabelais de Tours, (2015).
- [63] K. Nozawa *et al.* *Langmuir*, **21**, 1516–1523, (2005).
- [64] J. A. Stratton. *Théorie de l'électromagnétisme*. Dunod, p. 41–56, (1961).
- [65] L. Schwartz. *Méthode mathématique pour les sciences physique*. Hermann, p. 89, (1965).
- [66] D. G. Duffy. *Green's function with application*. Chapman & Hall/CRC, p. 277 (2001).
- [67] K. K. Kääkäinen, A. H. Sihvola et K. I. Nikoskinen. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, **38**, 1303–1308, (2000).
- [68] S. Torquato. *Random heterogeneous materials – Microstructure and macroscopic properties*. Interdisciplinary applied mathematics, Springer, (2002).
- [69] A. Priou. *Dielectric properties of heterogeneous materials*. Progress In Electromagnetics Research, Elsevier, (1992).
- [70] J. C. M. Garnett. *Trans. Roy. Soc.*, **53**, 385–420, (1904).
- [71] D. A. G. Bruggeman. *Ann. Phys.*, 636–664, (1935).
- [72] H. Looyenga. *Physica*, **31**, 401–406, (1965).
- [73] E. Yablonovitch. *Phys. Rev. Let.*, **58**, 2059–2062, (1987).
- [74] S. John. *Phys. Rev. Let.*, **58**, 2486–2489, (1987).
- [75] K. M. Ho, C. T. Chan et C. M. Soukoulis. *Phys. Rev. Let.*, **65**, 3152–3155, (1990).

Diffusion électromagnétique par des objets inhomogènes : De la couche à la structure complexe

Éva DIEUDONNÉ

Les objets électromagnétiques sont conçus en considérant des matériaux aux propriétés radio-électriques (permittivité, perméabilité) homogènes. Néanmoins, lors de leur réalisation les matériaux réels peuvent présenter des fluctuations de ces propriétés. Ce travail porte sur la mise au point d'outils capables d'estimer le champ diffusé produit par les fluctuations. Trois méthodes ont été mises au point : EMFORS, ABE et RECY pour la détermination du champ diffusé par des fluctuations de permittivité et de perméabilité. La modélisation de la contribution des fluctuations de perméabilité est une avancée significative. En effet, il n'existait pas d'outil traitant ce problème dans toute sa généralité pour estimer le champ diffusé par cette fluctuation. L'absence de magnétisme aux fréquences des ondes optiques en est la principale raison.

Les trois méthodes ont toutes pour base une approximation du premier ordre. Elles permettent d'estimer le champ diffusé par des fluctuations de permittivité et de perméabilité au sein d'un empilement de couches magnéto-diélectriques. Chaque méthode possède ensuite des particularités propres.

La méthode EMFORS est une résolution matricielle. Elle permet une résolution rapide. Nous avons ainsi pu montrer que la nature de la fluctuation influe sur le niveau de l'intensité diffusée. Ainsi, dans le cas d'un slab simple dans l'air, la fluctuation de perméabilité (à valeur égale) génère moins de champ diffusé que la fluctuation de permittivité.

La méthode ABE est une résolution itérative utilisant les admittances. Elle permet l'obtention d'une solution analytique. Cette solution analytique permet d'obtenir dans des cas simples des outils d'estimation rapide du champ diffusé pour une couche mince dans l'air ou sur un métal.

La méthode RECY est une méthode qui permet d'estimer à l'aide du principe de réciprocité le champ diffusé dans un objet quelconque à partir de la simple connaissance du champ dans l'objet sans défaut et de la fluctuation. Cette méthode permet une fois le calcul du champ idéal effectué par une méthode quelconque (analytique ou numérique) de calculer le champ diffusé de n'importe quelle forme de fluctuation.

Nous avons appliqué RECY à des structures comme un réseau simple, une structure industrielle et aux cristaux photoniques. La méthode a donné de très bons résultats lorsque les défauts étaient compatibles de l'approximation du premier ordre. Dans les cristaux photoniques, les défauts présentent une réponse résonante non compatible de l'approximation du premier ordre. Aussi pour l'étude des défauts dans les cristaux photoniques, nous avons utilisé une méthode de Monte-Carlo. Nous avons ainsi montré la contribution majeure de la polydispersité des tailles des inclusions constitutives du cristal.

Mots clés : électromagnétisme, diffusion, perméabilité, approximation du premier ordre, réciprocité, cristaux photoniques.

Electromagnetic objects are designed by considering homogeneous materials properties (permittivity, permeability). However, during their realization real materials may present fluctuations of their properties. This work focuses on the development of tools able to estimate scattered fields produced by fluctuations. Three methods have been developed : EMFORS, ABE and RECY for the determination of the scattered field by fluctuations of permittivity and permeability. Taking into account permeability fluctuations is a significant advance. Indeed, there was no tool to estimate the scattered field by such a fluctuation, due to the absence of magnetic properties at optical frequencies.

The three methods are based on the first order approximation. They allow to estimate the scattered field by fluctuations of permittivity and permeability within magneto-dielectric multilayer.

The EMFORS method is a matrix resolution. It allows rapid resolution. Thus, we have shown that the nature of the fluctuation plays on the scattered intensity levels. Thus, the permeability fluctuation (for same value) scatters less than the permittivity fluctuations.

The ABE method is an iterative resolution using the admittances. It gives an analytical solution in simple cases. This analytical solution gives tools for rapid assessment of the scattered field for a thin layer in the air or on a metal.

The RECY method is a method which allows to estimate the field in an object using the principle of reciprocity from the knowledge of the field in the object without defect and of the fluctuation function. This method allows, once the ideal field calculated by any method (analytic or digital), to obtain the scattered field from any structure.

We applied RECY for structures such as elementary gratings, an industrial structure and photonic crystals. The method has shown very good agreement when the defect is compatible with first-order approximation. In photonic crystals, defects present a resonant response that invalidate the first-order approximation. For this reason, defects in photonic crystals were investigated by a Monte-Carlo method. We have thus shown that polydispersity of the sizes of the objects is the main contribution to scattered field in photonic crystals.

Keywords : electromagnetism, scattering, permeability, first-order approximation, reciprocity, photonic crystals.